• 王 其 俊 •

超导量子干涉器

SQUID

• 西北大学出版社 •

DC-SQUID RF-SQ

30.3

内　容　简　介

本书比较全面和系统地论述了射频超导量子干涉器(RF-SQUID)、直流超导量子干涉器(DC-SQUID)及SQUID磁测仪器的工作原理、设计方法、典型结构和电路、制作工艺以及发展动向。全书共六章：超导电性基础、约瑟夫逊效应、射频超导量子干涉器、直流超导量子干涉器、超导量子干涉器的应用、超导结和超导量子干涉器的制备。每章章末附有参考文献。

本书的读者是：SQUID仪器的研制人员，低温物理、地球物理、生物磁学、计量科学方面的技术人员，有关大专院校的师生。

超导量子干涉器

王其俊

西北大学出版社出版发行

（西安市太白路）

新华书店经销　西安电子科技大学印刷厂印刷

开本787×1092　1/16　印张10.25字数260千

1988年5月第1版　1988年5月第1次印刷

印数：1—2000

ISBN 7—5604—0021—3/O·3　定价：2.80元

序

超导量子干涉器(SQUID)是一种磁通传感器，配上输入和测读电路，即可构成磁感应强度、磁场梯度、磁化率、电流、电压、电阻、小位移等测量仪器。它们的灵敏度、动态范围、频率响应、响应时间比同类常规仪器高几个数量级，在低温物理、生物物理、地球物理、计量等学科上有着重要应用，在地质勘探、医疗、航天、通讯、军事等部门亦有巨大的应用潜力，所以发展很快。七十年代中期，第一代 SQUID 问世，八十年代初第二代 SQUID 投放市场。近来，超导材料研究工作的一系列重大突破，为工作在液氮乃至干冰温区的 SQUID 制造奠定了物质基础，将导致这些温区的 SQUID 的诞生，并大大扩展 SQUID 仪器的应用范围。可以深信，SQUID 仪器的发展前景非常明朗。

本书主要讨论 SQUID 的原理、设计、工艺和应用，它是作者根据近十年内发表的中、英文资料，并援引了中国科学院物理研究所、中国计量科学研究院、北京大学、复旦大学、长春地质学院、西北大学等单位在研制 SQUID 方面的经验，而写就的。其中第 5.5，5.6，6.1—6.3 节的部分或全部内容取自《超导隧道效应及其应用》一书(西北大学低温物理科研组主编，中国制冷学会 1981 年内部印刷)，它们分别由杨沛然(§5.5，§5.6，§5.8)，陈其恒、徐风枝、孟小凡(§6.1—§6.3)同志撰写。

在本书编写过程中，西北大学科研处给予了巨大的支持和帮助。南京大学姚希贤和中国计量学院曾佩韦二教授审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵意见，作者借此机会向他们表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中难免有缺点和错误，恳切希望读者批评指正。

王其俊

1987年7月

目　录

绪　论……（1）

第一章　超导电性基础

§1.1　超导体的基本性质 ……（9）

一、零电阻性……（9）

二、完全抗磁性……（10）

三、外磁场和传输电流可以破坏超导性……（11）

§1.2　金兹堡——兰道方程　　全磁通量子化 ……（11）

§1.3　电子——声子相互作用 ……（13）

§1.4　单电子隧道效应 ……（15）

第二章　约瑟夫逊效应

§2.1　弱耦合 ……（17）

§2.2　超导结的基本方程式 ……（18）

§2.3　超导结的伏安特性 ……（20）

一、伏安特性的测量……（20）

二、恒流源偏置的超导结的动态特性……（20）

三、$\cos\theta$ 项对超导结的动态特性的影响 ……（30）

第三章　射频超导量子干涉器

§3.1　实用结构 ……（33）

§3.2　RF-SQUID 环在外磁场中的性质 ……（34）

一、参量 K 对 RF-SQUID 量子态跃迁的影响 ……（37）

二、参量 G 对 RF-SQUID 量子态跃迁的影响 ……（39）

三、参量 G 和 K 对 RF-SQUID 量子态跃迁时间的影响 ……（41）

四、$\cos\theta$ 项对 RF-SQUID 量子态跃迁的影响 ……（43）

五、RF-SQUID 环孔中的外磁通是时间的线性函数或正弦函数时，它的动态特性……（43）

§3.3　$I_{rf}-V_{rf}$ 特性和 $V_{rf}-\Phi_e$ 特性 ……（49）

一、测量结果和理论分析……（49）

二、射频偏置电流的选取……（56）

三、$V_{rf}-\Phi_e$ 特性 ……（57）

§3.4　锁定式线路 ……（58）

一、音频磁通调制……（59）

二、磁通锁定式线路……（61）

§3.5　磁通噪声和能量分辨率 ……（62）

一、磁通噪声……（62）

二、能量分辨率……（64）

§3.6 摆率……（66）
一、锁定式线路的通频带和磁通噪声的关系 ……（66）
二、失锁几率和平均失锁时间 ……（68）
三、摆率 ……（69）
§3.7 环电感计算……（70）
一、轮形空腔 RF-SQUID 环电感 ……（72）
二、单孔和双孔 RF-SQUID 环电感 ……（72）
三、平面薄膜 RF-SQUID 环电感 ……（73）
§3.8 磁通变换器……（74）
一、零磁通法 ……（74）
二、零电流法 ……（76）
§3.9 RF-SQUID 性能参数的测量 ……（77）
§3.10 实用电路简介 ……（78）
一、300 型探头 ……（78）
二、控制单元 ……（79）
§3.11 超高频、微波及其他射频 SQUID ……（82）
一、超高频 SQUID 和微波 SQUID ……（82）
二、两个射频信号偏置的 SQUID ……（83）
三、电阻滤波的 RF-SQUID ……（84）
四、非回滞模式的 RF-SQUID ……（84）
五、热噪声电流偏置的 RF-SQUID ……（85）
第四章 直流超导量子干涉器
§4.1 引言……（87）
§4.2 DC-SQUID 环的特性 ……（89）
一、DC-SQUID方程式……（89）
二、不计噪声时，DC-SQUID 的特性 ……（91）
三、考虑噪声时，DC-SQUID 的特性 ……（92）
四、电压噪声频谱密度 ……（95）
五、环流噪声频谱密度及相关噪声频谱密度 ……（96）
六、磁通噪声 ……（97）
七、固有能量分辨率 ……（99）
八、能量分辨率 ……（100）
九、$\frac{1}{f}$噪声……（102）
§4.3 测量电路……（103）
一、谐振电容两端的电压 ……（104）
二、频率响应和摆率 ……（106）
三、前级放大器的噪声 ……（108）
四、磁通噪声 ……（108）

五、漂移 …… (109)
第五章 SQUID 仪器
§5.1 磁强计 …… (111)
一、一般输入电路的 DC-SQUID 信噪比 …… (111)
二、DC-SQUID 磁强计的最小可检测能量 …… (113)
三、实用电路 …… (116)
§5.2 电压表 …… (118)
一、谐振式输入电路 DC-SQUID 电压表 …… (118)
二、非谐振式输入电路 DC-SQUID 电压表 …… (120)
三、实用电路 …… (121)
§5.3 电流计 …… (123)
§5.4 磁场梯度计 …… (124)
一、线绕输入电路的磁场梯度计 …… (124)
二、平面薄膜 DC-SQUID 磁场梯度计 …… (125)
三、同时测量磁场梯度的三个分量 …… (127)
§5.5 磁化率计 …… (130)
一、工作原理 …… (130)
二、噪声 …… (132)
三、应用 …… (132)
§5.6 核磁共振谱仪 …… (134)
一、工作原理 …… (134)
二、特性 …… (135)
§5.7 电压比较仪和电流比较仪 …… (137)
一、电压基准监测系统 …… (137)
二、电阻式电压比较仪 …… (138)
三、电流比较仪 …… (138)
§5.8 电阻电桥 …… (140)
§5.9 其他 SQUID 仪器 …… (141)
一、用于超流液氦研究的温度梯度计 …… (141)
二、测量弱磁场的绝对强度 …… (141)
三、射频衰减测量 …… (142)
第六章 超导结和 SQUID 的制备
§6.1 点接触结和点接触结 SQUID 的制备 …… (144)
§6.2 微桥结的制备 …… (146)
一、硬超导材料薄膜的制备工艺 …… (146)
二、微桥结的制备工艺 …… (147)
§6.3 隧道结的制备 …… (151)
一、铅合金隧道结的制备 …… (151)
二、铌隧道结的制备 …… (152)

三、A-15 材料隧道结的制备 …… (153)
四、T_C 大于 77K 的超导薄膜的制备 …… (154)

绪　论

1961年，B·D·Josephson从理论上预言了超导电子对隧道效应[1]，翌年，这个预言被实验证实[2]。紧接着，R·C·Jakevic等人于1964年发现[3]两个隧道结经超导体连成闭合环路，当通上适当大小的直流电流后，会显现一种宏观量子干涉现象，即隧道结两端的电压是该闭合环路环孔中的外磁通量的周期性函数，其周期为$\phi_0 = h/2e = 2.07 \times 10^{-15}$Wb，$h$和$e$分别为普朗克常数和电子电量，$\phi_0$为磁通量子。于是，人们把这个环路叫做超导量子干涉器(Superconducting Quantum Interference Device，缩写为SQUID)。它是用直流电流偏置的，故也叫做直流超导量子干涉器(DC-SQUID)。之后，人们又研制成功由超导微桥结、点接触结和焊滴结组成的DC-SQUID[4~6]。这种器件就其功能讲，是一种磁通传感器，可以用来测量磁通及转变成磁通的其他物理量，如电流、电压、电阻、电感、磁感应强度、磁场梯度即磁感应强度对空间坐标的一阶和二阶导数、磁化率、温度、位移等，但因当时的器件工艺水平有限，这种器件未能完善成为实用的测量仪器。

1967年，人们又发明了射频超导量子干涉器(RF-SQUID)[7]。这种器件的核心部分是一个点接触结和超导体连成的闭合回路，它是用射频磁通偏置的。由于只含有一个超导结，工艺上比较简单，与室温电路的耦合问题易于解决，磁通灵敏度也比当时的DC-SQUID的灵敏度高，因此获得迅速发展，在七十年代初就投入实际应用。1972年，美国已有商品出售，磁通灵敏度为$10^{-4}\phi_0 Hz^{-1/2}$，比常规磁测仪器好得多。

RF-SQUID的一个变种，即R-SQUID当时也获得应用[8]，它的核心部分是一个超导结、小电阻和超导体连成的闭合回路，小电阻上通有直流电，其他部分与RF-SQUID相同。R-SQUID可用来测量温度和热容。

1974年以前，DC-SQUID的发展速度比RF-SQUID缓慢，但1974年后，人们对DC-SQUID的兴趣又浓厚起来。这主要是因为超导薄膜工艺有了发展。1975年，J·Clarke等人研制成功与室温电路耦合良好的薄膜隧道结DC-SQUID[9]，它的磁通灵敏度比当时的RF-SQUID高一个数量级，到$10^{-5}\phi_0 Hz^{-1/2}$。1980年，最好的DC-SQUID的磁通灵敏度已达到$10^{-7}\phi_0 Hz^{-1/2}$，目前，人们正力图把灵敏度提高到量子力学极限水平，能量分辨率的量子力学极限约为$h/2\pi$。

薄膜超导结制备工艺的日趋完善，也促使RF-SQUID的研究工作向纵深发展，1981年，由隧道结和铌块组成的混合式RF-SQUID投放市场[10]。其性能如下：磁通灵敏度$2 \times 10^{-4}\phi_0 Hz^{-1/2}$；最大量程$\pm 500\phi_0$；频率响应0～20KHz，可延伸到200KHz；摆率$3 \times 10^5 \phi_0 S^{-1}$；漂移$\pm 2 \times 10^{-4}\phi_0/h_r$。

近年来，利用微波代替射频的微波SQUID获得发展。含有大量SQUID器件的集成电路也在发展，它将导致新一代SQUID仪器的诞生。

总之，DC-SQUID、RF-SQUID、R-SQUID及微波SQUID的理论、设计思想、制造工艺还在不断完善中，它们的性能还能大幅度提高，其应用范围还能扩大。

一台性能优良的SQUID仪器必须具有以下主要技术性能：能量分辨率高、冷热循环性

能好、精确度高、摆率大、线性好、频响宽、响应快、量程大、温漂小、抗电磁干扰能力强、抗震能力强、性能稳定、工作可靠、寿命长、能耗低、容易制作、容易安装、操作简便、便于携带、价格低廉等。显而易见，上述的一些指标是相互矛盾的，一台仪器不可能各方面都是完善的。实验工作者可根据具体任务去设计、选用和购置合适的 SQUID仪器。

SQUID 仪器的发展现状和动向如下：

一、发展 SQUID 理论

SQUID 仪器是精密仪器，它们的制作，必须在理论指导下进行，否则收效甚微。如今人们已经创立了较完善的设计理论，根据这些理论，可以设计超导结、SQUID 环、输入电路、耦合电路及室温电路。但目前还没有包括输入电路在内的最佳设计计算公式，没有计算散粒噪声和计算极限灵敏度的严格公式。最佳设计参数往往是利用实验方法确定的。

为此，近年来，人们正从理论上和实验上研究 SQUID 的极限灵敏度问题。这项研究工作很重要，它的解决将深化人们对于超导结和 SQUID 固有噪声的机理和规律性的认识，促进超导结工艺和高性能 SQUID 仪器的制造，有助于开拓 SQUID 新的应用领域。

已有的研究结果表明，隧道结的固有噪声比点接触、微桥结的固有噪声要小，DC-SQUID 的磁通噪声比 RF-SQUID 的磁通噪声小，因此，发展隧道结 DC-SQUID 有着更明朗的前景。

SQUID 的特性参量 β_c 和 β' 的最佳值是[12]：

$$\beta_c = \frac{2\pi I_c R^2 C}{\phi_0} \approx 1 \tag{0.1}$$

$$\beta' = \frac{2LI_c}{\phi_0} \approx 1 \tag{0.2}$$

式中 I_c、R、C 分别为超导结的临界电流、结电阻、结电容，L 为 SQUID 环电感。I_cR 和所用超导材料的能隙 2Δ 成正比，

$$I_cR \approx \frac{\pi\Delta}{2e} \tag{0.3}$$

在 $\beta_c \approx 1, \beta' \approx 1$ 的最佳条件下，DC-SQUID 的固有能量分辨率为 $8KT(\pi LC)^{1/2}$，其中 K 为波尔兹曼常数、T 为 DC-SQUID 的温度，因此，减小 T、L、C，使用能隙 2Δ 大即 I_cR 大的材料，I_c 和 R 取折衷的最佳值，可以改善能量分辨率。

美国标准局和IBM公司研制的DC-SQUID的能量分辨率已接近 $h = 6\times10^{-34}\mathrm{JHz^{-1}}$[11]，比近似理论计算出的极限能量分辨率大半个数量级。加州大学和劳洛次实验室联合研制的 DC-SQUID 的结电感为 2pH、结电容为 0.3pF，1.4K 时的能量分辨率为 $3.4\times10^{-34}\mathrm{J\cdot Hz^{-1}}$。

二、发展超导结和 SQUID 环的制作工艺

为了制作高性能的 SQUID 仪器，其中的超导结临界电流 I_c、结电阻 R 和结电容 C、SQUID 环电感 L，除了必须满足上述关系外，还要求超导结的电流和量子位相差间的关系最好是正弦式的或接近正弦式的，超导结及 SQUID 的参数不能因冷热循环和长期室温存放而变化，也不能随液氦温度的变化而明显变化，为此，所用超导材料最好是 Nb、Nb_3Sn、NbN、Nb_3Ge 等。目前最常用的超导材料是 Nb、Pb 合金。

全铌点接触结、微桥结、隧道结 SQUID 的性能可以大致比较如下：点接触结 SQUID 的优点是：容易制造，利用精密机械加工设备便可制造出来。也易做出临界电流、结电阻、结电容、电流——相位关系均满足要求的 SQUID 探头。它的缺点是冷热循环及抗震性能较差，采用专门措施(如用环氧树酯密封点接触结并用锁紧螺母定位等)，可使这两个缺点得到一定程度的改善，从而具有足够的可靠性及相当长的寿命。因此，七〇年代以前商品化 SQUID 都是点接触结的，绝大多数的实验也是用这种 SQUID 完成的。今后几年内，在要求不很高的低频实验和微波段应用中，它仍占有重要地位。但上述缺点却是匡有缺陷，不可能根治，加之它的微型化亦不可能，因此，迟早要被隧道结和微桥结 SQUID 所代替。

隧道结 SQUID 和微桥结 SQUID 的突出优点是：铌隧道结和铌微桥结的冷热循环及抗震性能较好，它们的参数不因冷热循环和长期室温存放而变化，是寿命较长的器件。缺点是极难制造。对于隧道结，需要用精密的超高真空溅射、蒸镀设备来制作仅有几十Å厚的氧化势垒层及势垒层两侧的铌膜。为消除隧道结直流伏安特性曲线上的回滞，还需要用电阻分流或制作线度为亚微米的小面积隧道结，并需严格控制膜的成分和厚度，要用电子束刻蚀工艺制作适当的样品图形。如今人们已经制造出长和宽均为 0.3μm 的隧道结[13]。对于微桥结，需用精密真空溅射、蒸镀设备来制作长和宽为微米量级、厚度为100Å量级的桥区。为消除微桥结伏安特性曲线上的回滞，则需把桥区尺寸减小到亚微米量级，或者采用变厚微桥，而制作亚微米尺寸的微桥结也需采用上述设备和工艺。目前人们已经制出长 0.25 μm、宽 50 nm、厚 30 nm 的微桥[14]。

近年来，人们正在研究半导体势垒隧道结及三维结构的微桥结[15~17]。前者的优点是势垒层较厚（几千Å）、结电容小、性能稳定。后者的优点是寄生电感、自热效应、准粒子电流的影响都小。这两种新型超导结将会改善 SQUID 仪器的性能。

1986 年以前制造的 SQUID 都是在液氦温度 (4.2K) 下工作的，这使得 SQUID 的广泛应用受到很大限制，为摆脱液氦，人们正在研究高临界温度超导材料的 SQUID。1987年4月下旬美、日两国分别研制出工作温度 68K 和 77K 的钇钡铜氧化物薄膜 SQUID。1987年5月下旬人们研制出临界温度 225K 和 260K 的新超导材料，还发现室温下显现超导迹象的材料。6月可能发现了 35°C 的超导体[18]。这些发展动向表明，工作在干冰温区乃至室温的 SQUID 将问世。

三、发展混合式 SQUID 探头

当 SQUID 环电感和超导结的临界电流满足式(0.2)时，相应 SQUID 的磁通分辨率高。因为合用超导结的临界电流为微安量级，故要求环电感为 10^{-10}H 量级，这是一个很小的电感。为保证小电感，对于点接触结 SQUID，就要减小环孔直径。但孔径太小时，输入线圈、反馈线圈、谐振线圈的绕制很困难，这些线圈和 SQUID 环间的耦合也变得很坏，有损 SQUID 性能。综合考虑后，发现单孔和双孔 SQUID 的孔径以 2mm左右、长度大于 8mm 为宜。为进一步改善 SQUID 性能，发明了环电感更小，由十几个孔并联而成的分数匝 SQUID，但它的结构复杂；还发明了环形空腔 SQUID，这种 SQUID 不仅环电感小，而且具有屏蔽外磁场的能力。现在人们公认，双孔 RF-SQUID 和环形空腔 RF-SQUID 是两种较好的结构形式。对于隧道结和微桥结 SQUID，隧道结或微桥结与平面超导薄膜组成的 SQUID 的环

电感要做到10^{-10}H量级，平面SQUID环孔直径必须小于1mm，而这样环孔与线绕输入线圈、反馈线圈、谐振线圈间的耦合不能达到最佳程度。隧道结或微桥结与柱面超导薄膜组成的SQUID的环电感可以做到10^{-10}H量级，但制作工艺较复杂，另外，输入线圈、反馈线圈、谐振线圈的安装、定位问题，对外界电磁干扰的屏蔽问题也较困难，因此，不易商品化。与此相反，双孔和环形空腔点接触结SQUID却没有这些缺点。

可见，隧道结或微桥结SQUID与点接触结SQUID的优缺点基本上相反，于是，人们试图制造一种兼有三种SQUID优点，同时又没有它们的缺点，因而性能更好的混合式SQUID。美国SHE公司1981年制成的混合式RF-SQUID相当于将点接触结环形空腔SQUID中的点接触结用隧道结代替而形成的[10]。国外，还研制了平面双孔RF-SQUID和双孔铌柱组成的混合式RF-SQUID[19]，国内学者也研制成功一种混合式DC-SQUID[20]。

四、发展集成式SQUID

SQUID环和输入线圈间的耦合系数愈大，则该系统的能量分辨率愈高。若输入线圈是线绕的，则与SQUID环间的耦合系数k不会高，k^2最多可达0.3左右。为了解决这个问题，有人[21]将平面螺旋状的输入线圈、平面DC-SQUID及平面调制线圈做在同一个基片上，环电感为90pH。输入线圈共50匝，电感为190nH。这时，k^2为0.86，4.2K时的能量分辨率为$19h$，1.5K时的能量分辨率为$8h$。

还有人研制成全铌膜集成式磁场梯度计，整体尺寸仅有$12\times17mm^2$。

发展集成式SQUID是SQUID技术的重要发展方向，这方面的工作才开始，潜力很大。将来可能会把前级放大器也做在含有SQUID环、输入回路及调制回路的基片上。甚或可能作出由微型SQUID阵列组成的模——数转换器。模——数转换器的用途很多，其中一个应用是取代如今的RF-SQUID和DC-SQUID磁测仪器中的放大器及锁相电路，从而大大简化电路，也消除了相应的噪声。这种数字式磁测仪器的噪声可达到量子力学极限。它的其他优点是：摆率更高，线性更好，电路中的有源器件更少。现在已做出含有16个超导结的模——数转换器[22]。它是新一代的SQUID仪器。

发展集成式SQUID的最终目标是创制各种数字式电路和模拟电路。

五、发展性能优良的电路

一台性能优良的SQUID仪器，不仅超导结和探头部分要好，同时还要有优良的电路。

对于RF-SQUID，射频偏置频率高时，灵敏度加大、摆率增高、频率响应加宽。为此，人们研制成功超高频(≈460MHz)SQUID[23]及微波(10GHz)SQUID[24]。这种微波SQUID需要室温的微波源及波导系统，比RF-SQUID系统复杂。为此，有人建议发展微波(3GHz)SQUID。

为提高RF-SQUID的性能，还要求谐振线路的谐振阻抗大、谐振线圈和前级放大器的噪声小，为此，有人发明了工作在液氦温度的低噪声、低漂移前级放大器[25]。

对于DC-SQUID，SQUID环和前级放大器间往往用变压器耦合，这不能达到最佳阻抗匹配。为此，人们发展了谐振式耦合电路[26]。

为提高SQUID磁强计的灵敏度及降低SQUID电压表的噪声，人们发展了谐振式输入

电路[27]。

关于电路的室温部分，电路程式必须先进，要有温度补偿电路、抗干扰电路、信号平滑电路、线性化电路、置零电路、监测电路及量程、灵敏度、摆率转换电路。另外，所用器件性能必须优良，接地及屏蔽措施必须得当。

六、发展轻型杜瓦容器和微型制冷机

SQUID 探头本身是小巧的，但如今的探头都在液氦温度下工作。为此，必须把探头装入液氦杜瓦容器，并需经常补充液氦的消耗，这就使得整个系统庞大、笨重，严重阻碍着 SQUID 仪器在野外、空中及水下的应用。解决这个问题的根本办法是：发展工作温度高于 4.2K 的 SQUID。而就低温的获得和保持而言，则要发展尺寸小、重量轻、蒸发率小、坚固耐用，能满足一些特殊要求(如无磁性、特定形状)的杜瓦系统。如今已经制造出容量5-25升、日蒸发率为 1.0 升的玻璃钢杜瓦容器；还制出容量 180 升、日蒸发率为 1.8 升的杜瓦容器。太空实验室用的蒸发率极小的杜瓦系统正在研究中。

还要发展 SQUID 仪器专用的震动小、噪声低、无磁性、能耗小、操作简便的微型液氦机。这种微型液氦机和轻型杜瓦系统最好是一个整体。由于氦气资源有限，该系统应当是闭合循环系统且泄漏率低。微型斯特令循环制冷机现可获得的最低温度已达 7K[28]，可望达到 4.2 K。

美国斯坦福大学正在研制一种新原理的制冷机：在电路基片上刻蚀出微型毛细管，氮气通过毛细管膨胀，由于焦耳——汤姆逊效应产生冷量，可使基片冷却到 80K。再继续利用氢气和氦气的焦耳——汤姆逊效应，则可能把基片冷却到 4.2K。这种制冷机对于 SQUID 仪器的广泛应用将有重要意义。

七、发展 SQUID 仪器的应用

SQUID 是一种磁通传感器，用适当的输入电路与之耦合，便可以测量转变成磁通的其他物理量，如磁感应强度、磁感应强度对空间坐标的一阶导数和二阶导数、磁化率、电压、电流、电阻、电感、线位移、射频衰减、射频功率等。SQUID 测量这些量的优点如下：

1. 灵敏度极高。如测量磁感应强度、磁感应强度对空间坐标的一阶导数、电压、电流、电阻、电感、磁化率、线位移的灵敏度已分别达到 $10^{-16}THz^{-1/2}$、$10^{-15}Tm^{-1}Hz^{-1/2}$、$10^{-15}VHz^{-1/2}$、$10^{-13}AHz^{-1/2}$、$10^{-8}\Omega$、$10^{-11}H$、$10^{-15}emu/cm^3$、$10^{-2}\mathring{A}$。随着 SQUID 仪器的进一步完善，测量这些量的灵敏度还能提高 1 到几个数量级。

2. 量程大。可测量的最大磁场接近于所用超导材料的临界磁场。对于铌材，可达百分之几。但这时存在漂移和回滞现象。可测量的最小磁场为 $10^{-16}T$。亦即，它可以测量从 10^{-16}到 $10^{-2}T$ 的磁场。

3. 线性好。SQUID 仪器本质上是线性的，已作到 10^{-6}。它的非线性主要来源于结构材料中的顺磁性杂质，另外，薄膜 SQUID 也显现非线性效应。使用更纯的结构材料或改用块状超导体，非线性可小于 10^{-7}。

4. 频率响应宽。上限频率约为调制频率的一半。对于微波 SQUID，调制频率为射频，因此，它的响应频率可以作到从 0 到几百 MHz。

5. 摆率大。摆率决定于噪声及调制频率，噪声愈小和调制频率愈高，则摆率愈大。摆率已作到$10^6\phi_0 S^{-1}$，可望再提高一、两个数量级。

以上各性能指标都比常规弱磁测量仪器好1个或几个数量级，因此，利用它可以解决常规仪器不能解决的很多精密测量问题。迄今，它主要用在低温物理学、计量标准工作、地球物理学、生物磁学等方面

具有回滞的SQUID还是一种开关元件，可以构成各种逻辑电路。它的优点是：(1)速度高，开关速度为10pS，比半导体器件快10倍以上；(2)能耗低，每个器件的能耗为μW量级，比半导体器件小10^3倍；(3)集成度高，可与半导体集成电路相比拟，例如，处理机和贮存器的体积为$10cm^3$；(4)信号在超导微带线中传输时的畸变很小；(5)尺寸稳定，用于谐振器时，具有很高的频率稳定性；(6)许多靠得很近的超导微带线中的信号相互干扰很小；(7)热噪声低。对于低电平和宽频带信号，仍有很高的信一噪比；(8)超导薄膜可提供理想的磁屏蔽；(9)传输线终端可以加电阻性匹配负载，使得信号不反射；(10)在4.2K，扩散、腐蚀、电迁移等物理现象和化学反应几乎都停止了，使器件的可靠性加大。可见，发展以SQUID为基本单元的各种电路具有美好的前景。

SQUID技术应用的发展动向如下：

1. 提高已有实验室用SQUID仪器的性能并研制新型SQUID仪器，如自标定噪声温度计[29]、三分量梯度计[30]、测量磁场强度绝对值的仪器[31]、平面微波SQUID[32]、电容分流的双环孔DC-SQUID[33]、噪声偏置的RF-SQUID[34]、二个射频电流偏置的RF-SQUID[35]、SQUID高频电流放大器[36]、热容测量仪[37]、工作在超流氦温度的电流比较仪、平面的电压基准、射频衰减及噪声温度计等，以供低温物理、计量标准、地球物理、生物磁学、材料科学研究用。

2. 研制医疗诊断用的SQUID仪器[38]。目前SQUID仪器对人体磁性(如心磁、肺磁、脑磁等)的研究仍处于基础研究阶段。与电测量法相比，它有许多优点，如可无接触测量、可测量直流效应、可测量体内组织诱发出的磁场等。很可能用于心血管系统疾患、矽肺诊断、胎儿心率测量，也可能有助于揭示大脑的活动规律。为此，需提高磁场梯度计的灵敏度，采用信号平均技术及带通滤波技术。

3. 发展地质勘察用的SQUID[39]。从灵敏度、频率响应等性能来看，SQUID仪器在寻找石油、地热、各种金属矿藏方面有着明朗的前景。为实现这个目的，需发展野外、空中、水下用的三分量梯度计及三分量梯度计和重力仪的组合系统。这些系统不仅灵敏度要高，还要有良好的抗震、抗电磁干扰能力，其尺寸和重量要小。

4. 发展用于天体研究的SQUID仪器[40]，如测量太阳及其他天体的磁场，测量太阳风及电离层中的粒子流的磁场反常。将SQUID仪器作为辐射热测量仪的低噪声、低阻抗放大器。

5. 发展与重力仪、陀螺仪、加速度计及惯性导航系统配套的SQUID仪器[41]。

6. 发展SQUID低频通信系统[42]。

7. 发展用于潜艇侦察的SQUID系统[43]。

8. 发展用于引力波、基本粒子及磁单极子探测的SQUID系统。对于这种应用，要求尽量提高SQUID的灵敏度。

9. 发展包括大量SQUID器件的高速数字式电路，如取样自保电路，逻辑、触发、贮

存电路，计数器，模—数转换器，移位寄存器，滤波器，多道谱仪[43]以及超导电子计算机。为此，需要发展大规模集成电路工艺及微型组装工艺。

10．发展包含大量SQUID器件的模拟电路，如参量放大器、混频器、稳频器、微波发生器、超外差毫米波接收机[43]。

由上述可以得到以下结论[44]：

SQUID是一种具有优良性能的磁通传感器和开关元件。SQUID加上适当的输入电路便可构成许多测量仪器。将许多微型SQUID及其他元件组合在一起，便可以构成许多数字式集成电路、模拟式集成电路。如今，仅SQUID低频磁测仪器商品化了，其他SQUID仪器和电路还处于实验室研究阶段。商品化低频磁测仪器的灵敏度、摆率、线性、量程、频率响应等比常规仪器好得多，已用来解决常规仪器不能解决的许多精密测量问题，其性能还可大幅度提高。而处于实验室研究阶段的SQUID磁测仪器的灵敏度已经很高了，但其他性能还有待改善。

含有大量SQUID的集成式数字电路和模拟电路研究工作正在展开。

当代，一个新的技术革命正在兴起，计量技术和微电子技术是新技术革命的组成部分。SQUID技术又是计量技术和微电子技术的一个分支，它正强有力地向其他学科渗透，同时又极力吸收其他学科的新成就壮大自己，从而具有旺盛的生命力。SQUID技术正蕴酿着新的重大突破。

参 考 文 献

[1] B.D.Josephson, *Phys. Lett.*, 1, 251(1962)

[2] P.W.Anderson et al., *Phys. Rev. Lett.*, 10, 236(1963)

[3] R.C.Jakevic et al., *Phys. Rev. Lett.*, 12, 159(1964)

[4] J.Lambe et al., *Phys. Lett.*, 11,16(1964)

[5] J.E. Zimmerman et al., *Phys. Rev.*, 141, 367(1966)

[6] J. Clarke, *Phil. Mag.*, 13, 115(1966)

[7] A. H. Silver et al., *Phys. Rev.*, 157, 317(1967)

[8] R.A.Kamper et al., *J. Appl.Phys.*, 42, 132(1971)

[9] J.Clarke et al., *IEEE Trans.*, Mag-11, 724(1975)

[10] The SHE hybrid SQUID, *Phys. Today*, May, 24(1980)

[11] M.W.Cromer et al., *Appl. Phys. Lett.*, 37, 723(1981)

[12] 西北大学低温物理科研组，《超导隧道效应及其应用》，中国制冷学会，1981

[13] H.D.Hahlbohm et al., 《*SQUID' 80, superconducting quantum interference devices and their applications*》 Proceeding of the second international conference on superconducting quantum interference devices, Berlin(*west*), May 6-9, 1980

[14] D.A.Rudman et al., *IEEE Trans.*, Mag-15, 582(1979)

[15] H.Kroger et al., *IEEE Trans.*, Mag-15, 488(1979)

[16] M.D.Feuer et al., *Appl. Phys. Lett.*, 36, 226(1980)

[17] J.H.Claassen et al., *Appl, Phys. Lett.*, 36, 771(1980)

[18] 1987年5月26日《人民日报》,1987年6月3日《人民日报》

[19] C.T.Wu et al., *J. Appl. Phys.*, 49, 316(1978)
S.S. Pei et al., *Appl. Phys. Lett.*, 25, 480(1975)

C.T.Wu et al., *Appl. Phys. Lett.*, 30, 609(1977)
Makoto Ibuka et al., *IEEE Trans.*, Mag-30, 251(1981)
[20] 徐风枝等，第二届全国超导隧道效应学术会议资料，1982
[21] M.B.Ketchen et al., *Appl. Phys. Lett.*, 40, 736(1982)
[22] R.E.Harris et al., *Appl. Phys. Lett.*, 35, 720(1979)
[23] H.Ahola et al., *J.Low Temp. Phys.*, 35, 315(1979)
[24] J.N.Hollenhorst et al., *IEEE Trans.*, Mag-15, 474(1979)
[25] A.P.Long et al., *Rev. Sci. Instrum.*, 51, 85(1980)
R.J.Prance et al., *Cryogenics*, 21, 501(1981)
[26] J. Clarke et al., *J. Low Temp. Phys.*, 25, 99(1976)
[27] M.B.Simmonds et al., *IEEE Trans.*, Mag-15, 478(1979)
[28] 同[13] pp.423-443
[29] R.J.Soulen et al., *J. Low Temp. Phys.*, 40, 553(1980)
[30] K.Shirac et al., *Cryogenics*, 21, 707(1981)
[31] K.Kosuge et al., *Cryogenics*, 20, 223(1980)
[32] 同[13] pp. 955-960
[33] C.D.Tesche, *J.Low Temp. Phys.*, 47, 385(1982)
[34] 薛寿清等，第二届全国超导隧道效应学术会议资料，1982
[35] Tsutomu Yamashita et al., *J. Appl. Phys.*, 50, 4503(1979)
[36] J.E. Zimmerman et al., *Appl. Phys. Lett.*, 31, 360(1977)
[37] J.G. Park et al., *J. Low Temp. Phys.*, 40, 257(1980)
[38] 邱经武，低温与超导，第3期，39(1983)
[39] 同[13] pp.603-613
[40] J.E. Zimmerman, *Cryogenics*, 20, 3(1980)
[41] R.L.Peterson, *Cryogenics*, 20, 299(1980)
[42] M. Nisenoff, AIP Conf. Proc. 44, «*future trends in superconductive electronic*», Charlottesville, 1980, p.117
[43] A.H.Silver, *IEEE Trans.*, Mag-15, 268(1979)
[44] 王其俊，低温与超导，第4期，28(1984)

第一章　超导电性基础

§1.1　超导体的基本性质[1~6]

一、零电阻性

通常，在深低温区，金属的电阻率随温度的降低而减小，最后趋近于一稳定值，该稳定值叫做该金属的剩余电阻率。如纯铜在 4.2 K 时电阻率为 10^{-10}(Ωm)数量级，剩余电阻率为 10^{-11}(Ωm)数量级。这就是说，导电性很好的纯铜也有电阻。

1911 年昂尼斯等人发现，汞不遵从上面的规律：当降低汞的温度时，它的电阻在 4.2 K 附近突然下降，在很窄的温度间隔(约 0.05 K)内下降为零，在这个温度以下，电阻仍然为零。继而人们还发现许多材料都具有这种性质。这种性质称为超导电性。具有超导电性的材料叫超导材料。电阻突然变为零的温度称为临界温度。每一种材料都有一个特定的临界温度，通常用 T_C 表示。电阻转变为零以前的状态叫做常导态，电阻转变为零以后的状态叫做超导态。表 1.1 示出临界温度较高的超导元素、合金及化合物。超导陶瓷是新近发现的，计有锶镧铜氧化物、钡镧铜氧化物、钡钇铜氧化物、钡镝铜氧化物等。人们还发现起始转变温度 225 K、260 K、26°C、35°C 的新超导材料[7,8]。予计还会发现更多的高温超导体。这些新超导材料的性质正在研究中。原先发现的各种超导材料，按其性质可分成三类：第一类超导体、第二类超导体及不均匀第二类超导体。表 1.1 中，汞、铟等为第一类超导体。充分退火的铌为第二类超导体。未退火的铌、合金、化合物为不均匀第二类超导体。

表 1.1　一些超导元素、合金及化合物的临界温度

材　料	超导陶瓷	Nb_3Ge	Nb_3Ga	Nb_3Al	Nb_3Sn	V_3Si	V_3Ga	PdH_2
T_C(K)	90-95	23.2	22.5	19.0	18.1	17.6	16.5	16.0

材　料	$PbMo_6S_3$	Nb	Pb	La	Tc	V	Ta	Hg	In
T_C(K)	15.2	9.3	7.2	6.0	8.2	5.3	4.5	4.15	3.4

由超导体的零电阻性质，可以推导出两个重要结论：

1.　闭合超导回路中的电流永不衰减

为了深刻理解这个性质，可以进行下面的对比实验。匀强磁场中有一铜环，铜环中没有电流，磁力线均匀地穿过铜环。进而，在时刻 $t=0$，迅速地撤掉磁场，铜环中将感应一个电流 $I(0)$。这个电流随时间 t 的变化规律是：

$$I(t)=I(0)\exp(-Rt/L)$$

式中 R 和 L 分别为铜环的电阻和电感。此式表明，铜环中的电流以 L/R 为时间常数按指数规律衰减，最后衰减为零。这是因为铜环有电阻，电能变成热能损耗掉了。

如果将铜环改成超导圆环又怎样呢？首先在匀强磁场中放一温度较高、处于常导态的圆环。象铜环那样，圆环中没有电流，磁力线均匀地穿过圆环；接着我们降低温度，使圆环转

变为超导态。在这个过程中，由于磁场没有变化，圆环中仍然没有电流。最后，迅速撤掉磁场，圆环中就感应出电流，而且这个电流可以持续地存在下去，一点也不衰减，因为圆环没有电阻，不发热，原先的电能保持不变。

不限于超导圆环，用超导材料做成的任一闭合回路都具有这样的性质，即一旦在回路中激起电流，只要温度低于它的临界温度，这个电流就可以持久地存在下去，这种电流叫做持续电流。

不过需要指出的是，这种没有热损耗的性质，只是在超导线中通过恒稳直流电的情况下才存在。通过交流电时会出现一定的热损耗，但这种热损耗的机理跟通常金属中的焦耳热损耗不同。

2. 闭合超导回路中的磁通量守恒

将金属圆环置于匀强磁场中，环面与磁场垂直，此时，穿过环孔的磁通量 $\phi = AB$，式中 A 为环孔的面积，B 为磁感应强度。如果 B 是随时间 t 变化着的，那么由法拉第电磁感应定律得出，圆环中将产生一电动势 ε：

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -A\frac{dB}{dt}$$

环中的电流 I 由下式给出：

$$\varepsilon = RI + L\frac{dI}{dt}$$

如果该金属环是处于超导态的超导体，由于电阻 $R = 0$，上式成为：

$$-A\frac{dB}{dt} = L\frac{dI}{dt}$$

或 $$LI + AB = 常数$$

式中 AB 为外磁场的磁通量，LI 为感应电流产生的磁通量，$(LI + AB)$ 为穿过环孔的总磁通量或全磁通量。此式表明，穿过超导环路的总磁通量守恒。所以能守恒，是因为外磁场变化时，就要引起一个感应电流，这个感应电流产生的磁通量恰好能补偿外磁场引起的磁通量变化。当外磁场减到零时，由感应电流产生的磁通来维持原来环孔中的磁通。

需要指出的是，虽然超导环路的磁通量不变，但环面上各点的磁感应强度可能有变化。

二、完全抗磁性

在发现零电阻现象以后的相当时间里，人们一直认为超导体只是一种电阻为零的理想导体。1933 年迈斯纳等人的实验表明，超导体不仅仅是理想导体。第一类超导体还有一个基本性质即体内磁场为零，亦即第一类超导体具有完全抗磁的性质。这使得人们对超导体的性质有了进一步的认识。

该实验指出，将一大块超导样品的温度降低到它的临界温度以下，使其转变成超导态，然后再加上外磁场，则样品中的磁感应强度为零。如果把降温和加磁场的次序对调一下，先加磁场，由于温度高于它的临界温度，样品处于常导状态，样品内有磁场，然后再降温，使其转入超导态，则磁场从样品中排出。这个结果表明，不管降温和加磁场的次序如何，处于超导态的超导体内的磁感应强度为零。这个完全抗磁性质不能用零电阻性解释。它是第一类超导体的另一个基本性质。超导体内的磁场之所以为零是因为环绕超导体表面有一个持续电流，该电流的磁场与外磁场大小相等、方向相反，刚好抵消了外磁场，即起着屏蔽外磁场的

作用。该电流叫屏蔽电流。

显然，这里的"表面"不能理解为几何学上的面(厚度为零)。假如屏蔽电流硬是集中在几何表面，那么因为其厚度为零，在这几何表面的屏蔽电流密度就会无限大，而只要进入到几何表面以下，其电流密度为零。无限大的电流密度是不可能的，一下子从无限大跳跃到零也是不可能的。这就是说，屏蔽电流分布在具有一定厚度的表面层中。既然屏蔽电流不是集中在几何表面里，当然也就不可能在几何表面中把磁场完全屏蔽掉，而只能在一定厚度的表面层里把磁场逐渐地屏蔽掉。磁场在表面层内的等效穿透厚度叫做穿透深度。各种超导体的穿透深度为 10^{-6} cm 数量级。

三、外磁场和传输电流可以破坏超导性

如果把一个第一类超导体样品降温到它的临界温度以下，使其进入超导态后，加上一个强度逐渐增加的磁场 H，当 H 较小时，超导体具有零电阻性和完全抗磁性。但当磁场增加到某一值 H_C 之后，超导态又会回转到常导态，H_C 称为临界磁场。这个过程是可逆的，如果把磁场再减小到 H_C 以下，则超导态又将恢复。临界磁场 H_C 的数值，除了和材料有关外，还决定于温度 T，它们之间的关系为：

$$H_C(T)=H_C(0)[1-(T/T_C)^2]$$

式中 $H_C(T)$ 和 $H_C(0)$ 分别为开氏温度 T 和 0 时的临界磁场。第一类超导体的 $H_C(0)$ 是很小的，约几百高斯。

第二类超导体(和不均匀第二类超导体)有二个临界磁场：下临界磁场 H_{C_1} 和上临界磁场 H_{C_2}。当外磁场小于 H_{C_1} 时，第二类超导体具有零电阻性及完全抗磁性。当外磁场等于或大于 H_{C_2} 时，超导体转变成常导态。当外磁场在 H_{C_1} 和 H_{C_2} 之间时，超导体内分裂成许多个分别处于常导态和超导态的小区域，叫做混合态。当外磁场增加时，常导态小区域所占体积越来越大，超导态小区域的体积越来越小，当外磁场增加到 H_{C_2} 以后，超导态小区域的体积变为零，超导体变成常导态；反之，当磁场逐渐减小时，超导态小区域的体积越来越大，到外磁场低于 H_{C_1}，常导态小区域体积变为零，超导体又成为完全抗磁的。

不仅是外磁场，若样品中通以电流，当电流密度超过 J_C 以后，超导态也会被破坏。J_C 叫做临界电流密度。这个现象可以用磁场破坏超导电性来说明。例如，长直超导线通上电流，当该电流在导线表面的磁场达到 H_C 时，超导电性就被破坏。临界温度、临界磁场和临界电流密度是超导体的三个重要特性参数。

§1.2 金兹堡——兰道方程 全磁通量子化

1950 年，金兹堡和兰道提出了超导电性的唯象理论。他们认为超导态中的超流电子存在某种有序化，并引入序参量 $\phi(\vec{r})$ 描写它。ϕ 起着超导电子有效波函数的作用，$|\phi(\vec{r})|^2$ 代表超导电子在 $\vec{r}$ 处的数密度 $n_s(\vec{r})$。金兹堡——兰道方程组是：

$$\frac{1}{4m}\left(-i\hbar\nabla-2e\vec{A}\right)^2\phi+\alpha\phi+\beta|\phi|^2\phi=0 \tag{1.1}$$

$$\vec{j}=\frac{i\hbar e}{2m}(\phi\nabla\phi^*-\phi^*\nabla\phi)-\frac{2e^2}{m}|\phi|^2\vec{A} \tag{1.2}$$

式中$\frac{\alpha}{\beta}=-|\phi|^2$，$\frac{\alpha^2}{\beta}=\mu_0 H_c^2(T)$，$m$ 和 e 为电子质量和电量，$\vec{A}$为磁场的矢量势，磁感应强度$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，$\mu_0$ 为真空的磁导率，$\vec{j}$为电流密度，$\hbar=h/2\pi$。

式(1.1)形式上与量子力学中的一个质量为$2m$、电荷为$2e$的粒子在势场和电磁场中的薛定谔方程式相似，但有非线性项。由此式可以算出ϕ。式(1.2)决定电流分布，它与量子力学中的电流密度公式有相同形式。将ϕ理解为超流电子的有效波函数的道理就在于此。

利用金兹堡——兰道方程可以推导出超导环中的磁通量是量子化的。

序参量ϕ是复数，可以写成指数形式：

$$\phi=|\phi|e^{iv} \tag{1.3}$$

其中v为序参量的位相，将式(1.3)代入(1.2)得到：

$$\vec{A}+\frac{m}{2e^2|\phi|^2}\vec{j}=\frac{\hbar}{2e}\nabla v \tag{1.4}$$

按伦敦方程，$m/2e|\phi|^2=\mu_0\lambda^2$，$\mu_0$为真空的磁导率，$\lambda$为超导体的穿透深度。这样在超导环中取一闭合回路$\Gamma$，对上式两边沿此回路积分得到：

$$\oint\vec{A}\cdot\vec{dl}+\oint\frac{m}{2e^2|\phi|^2}\vec{j}\cdot\vec{dl}=\frac{\hbar}{2e}\oint\nabla v\cdot\vec{dl} \tag{1.5}$$

如果超导环的厚度比穿透深度大很多，可将回路选在远离表面的内部。由于完全抗磁性，回路上的$\vec{j}$处处为零，于是式(1.5)左面第二项等于零。第一项为回路所包围面积上的磁通量。根据对ϕ的单值性要求，上式右端的积分应为2π的整数倍，即$2n\pi$，n为任一整数或零，于是

$$\oint\vec{A}\cdot\vec{dl}=n\phi_0$$

其中$\phi_0=\frac{2\pi\hbar}{2e}=2.07\times10^{-15}$ Wb

ϕ_0称为磁通量子。此式表明，环路所包围面积的磁通量是量子化的。

如果所选环路的一部分或全部距离超导环表面很近，则环路上的$\vec{j}\neq0$。在这种情况下，

$$\oint\vec{A}\cdot\vec{dl}+\oint\frac{m}{2e^2|\phi|^2}\vec{j}\cdot\vec{dl}=n\phi_0 \tag{1.6}$$

上式左端称为全磁通量，用ϕ表示，

$$\phi=\oint\vec{A}\cdot\vec{dl}+\oint\frac{m}{2e^2|\phi|^2}\vec{j}\cdot\vec{dl} \tag{1.7}$$

于是，在一般情况下，全磁通是量子化的。

由式(1.5)和(1.7)，得到：

$$\oint\nabla v\cdot\vec{dl}=\frac{2\pi\phi}{\phi_0} \tag{1.8}$$

这里顺便指出，对于SQUID环(即由超导结和超导体组成的环路)，由于积分回路Γ要经过结平面，位相v的变化是不连续的，又由于v可以相差2π的任意整数倍，所以，

$$\oint\nabla v\cdot\vec{dl}=\theta-2n\pi \tag{1.9}$$

式中 θ 为超导结两端的量子位相差。代入式(1.8)得到：

$$\theta = 2\pi\frac{\phi}{\phi_0} + 2n\pi \tag{1.10}$$

§1.3 电子——声子相互作用

超导电性的微观理论很复杂，必须用高等量子力学才能阐述清楚，这里仅简单介绍电子——声子相互作用，目的在于引出库柏电子对和超导能隙的概念。

大家知道，金属是由正离子(原子核和内层轨道电子组成)和价电子组成的。价电子处于公有化状态。

描述价电子运动的最简单方法是把价电子看成是在势阱中运动的自由电子。金属中，自由电子组成自由电子气体。电子的状态用它的动量 P 和自旋取向来描述。电子在各个状态的几率由费米分布决定。在绝对零度，在费米动量 P_F 以下的所有电子态均为自旋取向相反的一对对电子分别占满，而 P_F 以上的所有状态全部空闲着。这种分布形成以费米动量 P_F 为半径的球体，叫做费米球，相应的球面叫费米面。与 P_F 相应的能量 ε_F 叫费米能。如果温度 T 大于 0K，但不太高，$K_B T \ll \varepsilon_F$(K_B 为玻尔兹曼常数)，由于热激发，费米面下邻近费米面的电子跃迁到费米面以上能量更高的电子态，原来的电子态成为空位。这时，电子的分布仍然是球状的，只是球表面不象 0K 时那样清晰。

描述正离子运动的方法是：正离子均围绕着各自的平衡位置即晶格点阵的格点振动，各个正离子的振动并不是独立的，它们通过弹性力连在一起，从而形成象耦合摆那样的振动系统。这种振动系统，通过线性变换，可以分解成一些彼此独立的简正振动模式。每一种简正振动模式实际上是具有一定频率、一定波长和传播方向的弹性波。设它的圆频率为 ω，波矢为 $\vec{K}(K$ 的大小为 $2\pi/\lambda$，方向沿传播方向，λ 为波长)。按照量子力学，每一种简正振动模式的能量只能是 $\hbar\omega$ 的整数倍，所携带的动量只能是 $\hbar\vec{K}$ 的整数倍。这种量子化的弹性波或声波的最小单位叫声子。

金属中的电子和晶格点阵之间存在着相互作用，如一个电子把一部分能量及动量转移给晶格点阵，激起它的某个简正模式的振动，叫做发射一个声子。另外，电子也可以从点阵那里获得能量及动量，使某个简正模式的振动减弱，叫做吸收一个声子。这些作用统称为电子——声子相互作用。电子——声子相互作用可以导致许多种物理效应。在此，我们感兴趣的是电子——声子相互作用能够把两个电子耦合在一起，就好象它俩直接吸引一样。例如，动量为 $\vec{P}_1$、能量为 $\varepsilon(P_1)$的电子 1，发射一个动量为 $\hbar\vec{K}$ 的声子，它的动量和能量成为 $\vec{P}_1'$ 和 $\varepsilon(P_1')$。这个声子又被动量为 $\vec{P}_2$ 能量为 $\varepsilon(P_2)$的电子 2 吸收，使电子 2 的动量和能量变为 $\vec{P}_2'$ 和 $\varepsilon(P_2')$。即两个电子交换声子而产生相互作用。在一定情况下，这个作用是吸引作用，使两个电子结合在一起。

这种过程的物理实质在于：本来全体电子在各种动量态的分布恰好使得电子气体密度空间分布是均匀的。电子 1 状态的改变扰动了这种均匀密度分布，使电子气体密度有一个涨落 $\delta\rho^e$。因为电子气体通过电力和格点上正离子紧密地耦合着，所以，$\delta\rho^e$ 又要引起正离子密度的涨落 $\delta\rho^i$。电子密度的涨落 $\delta\rho^e$ 和正离子密度的涨落 $\delta\rho^i$ 都会向四周传播，从而产生声

波或已产生声子。由能量守恒和动量守恒知，电子密度涨落的波矢 $\vec{K}=(\vec{P}_1-\vec{P}_1')/\hbar$，频率 $\omega(K)=[\varepsilon(P_1)-\varepsilon(P_1')]/\hbar$。声子的动量和能量分别为 $\hbar\vec{K}$ 和 $\hbar\omega(K)$。同样，可以讨论电子2吸收声子的过程。$\delta\rho^e$ 相当于施加给晶格的强迫力对振子作负功，使振动衰减或停振。按强迫振动理论，如果强迫力的频率 $[\varepsilon(P_1)-\varepsilon(P_1')]/\hbar$ 小于自然频率 $\omega(K)$，则 $\delta\rho^e$ 和 $\delta\rho^i$ 同相；否则，两者反相。同相时，$\delta\rho^i$ 完全跟得上 $\delta\rho^e$ 的变化，正离子随时都向电子1集中，这样电子1的电场要受到正离子的屏蔽，电子2受到吸引作用。反相时，正离子远离电子1，电子1和电子2间呈现排斥作用。

按照上面的讨论，只要满足条件：

$$|\varepsilon(P_1)-\varepsilon(P_1')|=|\varepsilon(P_2)-\varepsilon(P_2')|\leqslant\hbar\omega(K) \tag{1.11}$$

两个电子交换声子才具有净吸引作用。等式表示交换声子过程是能量守恒的。

现在进一步研究这种吸引作用。在绝对零度附近，费米球内的电子态均被占满，费米球内离费米面很远处的电子不能向邻近的电子态跃迁，它们只可能跃迁到费米面附近的空态上，但因声子频率约为德拜频率 ω_D 的量级，比 $\varepsilon_F/\hbar$ 小二个数量级，不能满足条件(1.11)，所以，深处的电子不能和别的电子交换声子产生净吸引作用。如果考虑费米面附近球壳内的电子，情况就不同了，因为在它的邻近就有空态，电子可以向这些空态跃迁，条件(1.11)可以得到满足。这个球壳相应于能量在 $(\varepsilon_F-\hbar\omega_D,\ \varepsilon_F+\hbar\omega_D)$ 的电子，即这些电子通过交换声子可以产生吸引作用。

再看这个球壳中的两个电子。它们的初动量分别为 $\vec{P}_1$ 和 $\vec{P}_2$，总动量是 $\vec{P}=\vec{P}_1+\vec{P}_2$。交换声子后，动量成为 $\vec{P}_1'$ 和 $\vec{P}_2'$。由于动量守恒，$\vec{P}=\vec{P}_1+\vec{P}_2=\vec{P}_1'+\vec{P}_2'$，这对电子状态的可能跃迁被限制在两个球壳的相交部分，即一个圆镯状的空间内，这就是说，$\vec{P}_1'$ 的终端和 $\vec{P}_2'$ 的始端必须位于这个圆镯内。跃迁几率跟这个圆镯体积成正比。如果 $\vec{P}=0$，两个球壳重合，发生跃迁的几率要比 $\vec{P}\neq0$ 的其他情况大得多。$\vec{P}=0$ 表明 $\vec{P}_1=-\vec{P}_2$，因此，在费米面附近，动量相等而反向的一对电子间的吸引作用要比其他电子对之间的吸引作用强得多。

再考虑到自旋取向相同的二电子间有排斥作用，于是，在费米面附近自旋取向相反、动量相等而反向的两个电子间的吸引力最强。我们把这样的一对对电子叫做库柏电子对。

还要指出的是，由于电子间还存在着库仑斥力，所以只有在电子间通过交换声子产生的吸引力超过库仑斥力的情况下，二电子间才会有净吸引力，从而得以结合成为库柏电子对。

超导体中的库柏电子对的数目、库柏电子对中的二电子间的净吸引力大小和温度 T 有关。$T=0$K 时，费米面附近的电子全部结合成库柏电子对；$T\neq0$K 时，由于热激发，一些库柏电子对成为不配对的常导电子，此时，库柏电子对中的二电子间的净吸引力也减弱。温度愈高，结成电子对的电子数愈少，吸引力也愈弱，到临界温度时，吸引力为零，库柏电子对全部拆散成为常导电子。

巴丁、库柏和施里费三人创立的超导微观理论指出，一个库柏电子对拆散成为二个电子至少需要 2Δ 的能量；反之，两个电子结合成为库柏电子对时，至少要放出 2Δ 的能量。Δ 称为超导体的能隙，2Δ 的物理意义是：超导态的电子态密度图上有宽度为 2Δ 的禁带。2Δ 是温度的函数，随着温度的增加而减小。绝对零度时的 2Δ 值最大，温度等于超导体的临界温度时 2Δ 值减至零。

§1.4 单电子隧道效应

实验结果表明，一个由金属膜1、绝缘层、金属膜2组成的夹层，当绝缘层厚度 d 足够小(d≈几十Å)时，它们的直流伏安特性如图1.1所示。它们分别是 $N—I—N$ 夹层、$S—I—S$ 夹层和 $S_1—I—S_2$ 夹层的伏安曲线，N、I、S 分别表示通常金属、绝缘层、超导体。可以看出，电压小于几十毫伏时，$N—I—N$ 夹层的伏安曲线是一条直线。对于 $S—I—S$ 夹层，当 $V<V_0$ 时，电流很小。超过 V_0 后，电流突然上升，很快接近 $N—I—N$ 夹层的直线。$V_0=2\Delta/e$，2Δ 为超导材料的能隙。S_1-I-S_2 夹层的伏安曲线有一个极小值和一个极大值，其间是负阻区。极大值和极小值处的电压分别为 $(\Delta_2-\Delta_1)/e$ 和 $(\Delta_2+\Delta_1)/e$，$2\Delta_1$ 和 $2\Delta_2$ 分别为超导材料 S_1 和 S_2 的能隙，和 $S—I—S$ 夹层一样，过了极小值后，电流很快上升，接近它的 $N-I-N$ 夹层的直线。

这是一种量子力学现象，叫做单电子隧道效应。可以定性解释该曲线：以 $S-I-S$ 夹层为例。图1.2示出 $S—I—S$ 夹层两侧超导体在0K时的电子分布及态密度，横坐标为态密度，

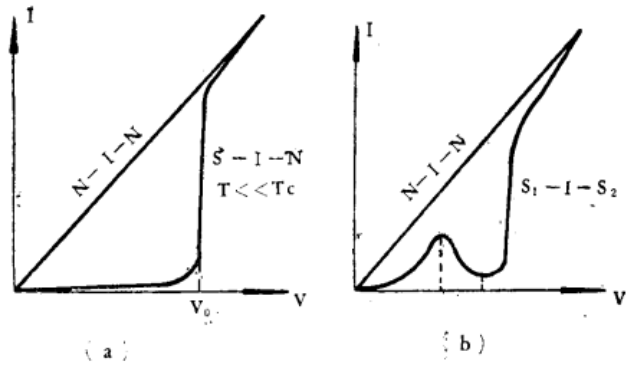


图1.1 金属膜—绝缘层—金属膜夹层的伏安特性

影线表示有电子占据。$S—I—S$ 夹层上不加电压($V=0$)时，左侧超导体的空态和满态与右侧超导体的空态和满态在同一高度，不可能有隧道电流。电压 V 大于0小于 $2\Delta/e$ 时，左侧超导体的满态对应着右侧超导体的禁带和满带，仍然不会有隧道电流。$V=2\Delta/e$ 时，左侧超导体的禁带下边缘刚好对应着右侧超导体的禁带上边缘，考虑到禁带边缘的态密度为无限大，所以一开始出现的电流就等于有限值，这就意味着在 $V=2\Delta/e$ 时存在一电流跃变。当 V 远

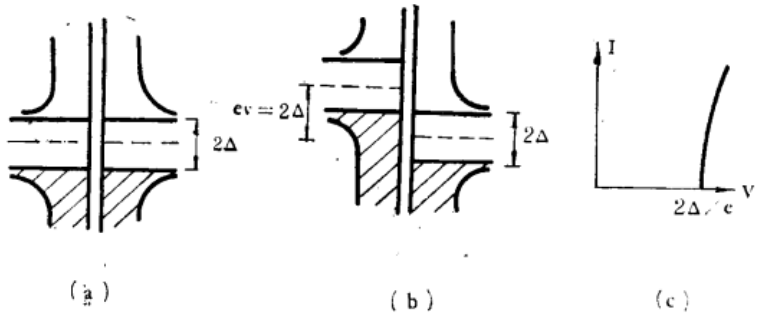


图1.2 $T=0$K时 $S—I—S$ 夹层两侧超导体中的电子分布

大于 $2\Delta/e$ 时，电压变化引起的隧道电流变化量仅涉及到态密度几乎和常导态一样的部分，于是伏安特性接近于 $N—I—N$ 的伏安特性。温度 $T\neq 0$K 时，情况有了一些改变，如图 1.3。一是能隙变成 $2\Delta(T)$，$\Delta(T)$要比 $\Delta(0)$小，$\Delta(0)$为 0K 时的能隙。二是禁带下面的电子有一部分被热激发跑到禁带之上，于是禁带下面有少量的状态空着，禁带上面的状态被少量电子占据。因此，只要一加上电压，就会出现隧道电流。显然，由于禁带上面和下面的电子及空穴不多，所以隧道电流不大。当电压增加到 $2\Delta/e$ 时，由于上面的原因，电流出现跃变。再增加电压时，电流的变化趋势跟 $T=0$K 时相似。

同理，我们也可以定性解释 $S_1—I—S_2$ 夹层的伏安特性。

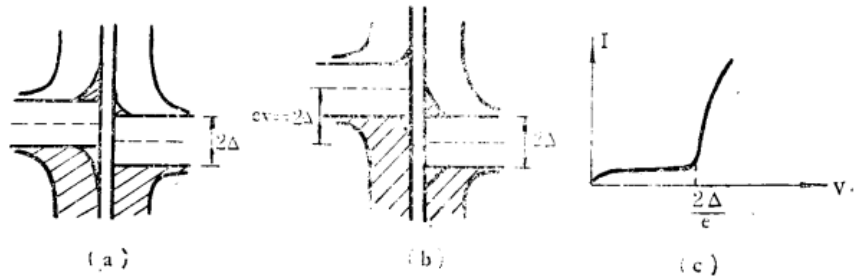


图 1.3　$T\neq 0$K 时 $S—I—S$ 夹层两侧超导体中的电子分布

由于电流出现突变时的电压和超导体的能隙有着简单的关系，所以可以通过测量夹层的伏安特性来确定超导体的能隙。

参　考　文　献

[1] A.C.罗斯-英尼斯，《超导电性导论》，人民教育出版社，1981

[2] 管惟炎等，《超导电性(物理基础)》，科学出版社，1981

[3] I.M.Firth，《超导电性》，科学出版社，1977

[4] R.D.Parks，《*superconductivity*》，New York，Dekker，1969

[5] L. Solymar，《*superconductive tunnelling and applications*》，London，Chapman and Hall，1972

[6] J.E.C.Willians，《*superconductivity and its applications*》，London，Pion，1970

[7] 1987 年 5 月 26 日《人民日报》

[8] 1987 年 6 月 3 日《人民日报》

第二章　约瑟夫逊效应

§2.1 弱　耦　合

约瑟夫逊的理论研究结果表明，由超导体 S_1、绝缘层 I 和超导体 S_2 组成的夹层，当中间的绝缘层厚度约为 10Å—20 Å时，该夹层中将会显现一些新奇现象。翌年，科学实验证实了这个预言。这就是电子对隧道效应，也叫做约瑟夫逊效应。

电子对隧道效应是两块超导体之间存在弱耦合时发生的现象。

超导体间弱耦合的概念是什么呢？当两块超导体离得很远，相互独立，那么它们各自的序参量即有效波函数的位相 ν_1 和 ν_2 分别等于某一任意常数，彼此没有什么关系。把这两块超导体逐渐靠近以致合并在一起，此时位相 ν_1 和 ν_2 必然相等。设想有某种中间状态，两块超导体既不离得很远，又不合并在一起，而是处在某种靠得很近的状态，可以想象到，此时两块超导体之间存在某种弱耦合，它们的位相既不完全相同，又不彼此独立，而是维持一定关系。例如，对于 S_1—I—S_2 夹层，当绝缘层厚度 t 很大时，S_1 和 S_2 彼此独立。当 $t=0$ 时，S_1 和 S_2 合并成一块超导体。当 t 为 10—20 Å 时，S_1 中的库柏电子对可以通过隧道效应转移到 S_2，S_2 中的库柏电子对也可以通过隧道效应转移到 S_1，从而 S_1 和 S_2 形成弱耦合。但是这种情况和整块超导体已很不相同，因为库柏电子对从 S_1 转移到 S_2 或从 S_2 转移到 S_1 的几率很小。这样的 S_1—I—S_2 夹层叫做隧道结。

除隧道结外，还有超导微桥结和点接触结等弱耦合机构。超导微桥结是一小片均匀超导薄膜，薄膜中间存在一个狭窄段，叫做桥区，桥区的长和宽一般都为微米数量级，从而使得桥区两侧的超导膜间的关系大为减弱，形成弱耦合，这种结构叫 Dagem 桥。如果桥区尺寸较大，为了减弱桥区两侧超导膜的关联，可以在桥区蒸镀一层通常金属，利用邻近效应使桥区的序参量适当地减弱，形成弱耦合。或者将通常金属离子注入桥区，使桥区的序参量适度减弱，形成弱耦合。这类超导微桥叫做 Notaray 桥。若把一根直径约为 1 毫米的超导线的一端磨尖，让该尖端和另一个超导平台相接触，便形成点接触结，它是介于隧道结和微桥结之间的弱耦合机构。当尖端和平台间有氧化层时，它接近于隧道结。当尖端和平台直接接触时，它接近于微桥结。隧道结、微桥结和点接触结统称为超导结。

电子对隧道效应包括四个方面的内容[1]：第一，当通过超导结的直流电流小于某一临界值 I_c 时，超导结两端的电压为零，即超导结具有一定的无阻载流能力，I_c 叫做超导结的临界电流；第二，超导结的临界电流 I_c 和外加磁场有关，当外磁场单调增加时，I_c 起伏变化不已。这个现象叫做超导量子衍射现象；第三，当超导结两端加有恒定电压时，超导结中存在一高频电流，同时向外发射同频率的电磁波，它的频率 f 和超导结两端的电压 V 成正比，

$$f=\frac{2e}{h}V=\frac{V}{\phi_0}$$

式中 e 为电子电量，h 为普朗克常数，ϕ_0 为磁通量子；第四，若用电磁波照射超导结，则该

超导结的直流伏安特性曲线上出现一系列的电流台阶。电流台阶所相应的电压 V_n 和电磁波频率 f 成正比，

$$V_n = n\phi_0 f$$

式中 $n=0$，1，2，……。

有时，电流台阶相应的电压 V_{nm} 为：

$$V_{nm} = \frac{n}{m}\phi_0 f$$

式中 n 和 m 为正整数。

如果隧道结上加一静磁场，而不加电磁波，它的伏安特性曲线也会出现一系列的电流台阶。

下面我们将讨论这些现象中与 SQUID 仪器有关的现象的理论。

§2.2 超导结的基本方程式

超导结的基本方程式是指：超导结两侧超导体的量子位相差和通过超导结的电流密度的关系，以及该量子位相差和超导结两侧的电压的关系。

推导这两个方程式的方法有几种，这里介绍费曼方法[2]，它只需库柏电子对的概念及一些量子力学知识，而且推导简单，物理图象清楚。

设有两个孤立超导体 1 和 2，它们的波函数为：

$$\phi_1 = \sqrt{\rho_1}\, e^{i\nu_1},\quad \phi_2 = \sqrt{\rho_2}\, e^{i\nu_2} \tag{2.1}$$

式中 ρ_1 和 ρ_2 分别为超导体 1 和 2 中的库柏电子对密度，ν_1 和 ν_2 分别为两个超导体中的量子位相，ν_1 和 ν_2 显然彼此独立变化，不存在任何关联，波函数和时间 t 的关系为：

$$i\hbar\frac{\partial\phi_1}{\partial t} = \mu_1\phi_1 \tag{2.2a}$$

$$i\hbar\frac{\partial\phi_2}{\partial t} = \mu_2\phi_2 \tag{2.2b}$$

式中 μ_1 和 μ_2 分别为超导体 1 和 2 中的所有库柏电子对的能量。

如果它们间存在弱耦合，从而形成超导结，那么，由于库柏电子对在它们之间可以有小的转移几率。此时 ϕ_1 的时间变化率不但依赖于 ϕ_1，而且还依赖于 ϕ_2，于是，式(2.2a) 变成如下形式：

$$i\hbar\frac{\partial\phi_1}{\partial t} = \mu_1\phi_1 + k\phi_2 \tag{2.3a}$$

同理，式(2.2b)变成：

$$i\hbar\frac{\partial\phi_2}{\partial t} = \mu_2\phi_2 + k\phi_1 \tag{2.3b}$$

其中 k 是表征两块超导体之间耦合程度的量。

将式(2.1)代入(2.3)得到，

$$\left(\frac{i\hbar}{2\sqrt{\rho_1}}\frac{\partial\rho_1}{\partial t} - \hbar\sqrt{\rho_1}\frac{\partial\nu_1}{\partial t}\right)e^{i\nu_1} = \mu_1\sqrt{\rho_1}\, e^{i\nu_1} + k\sqrt{\rho_2}\, e^{i\nu_2} \tag{2.4a}$$

$$\left(\frac{i\hbar}{2\sqrt{\rho_2}}\frac{\partial\rho_2}{\partial t}-\hbar\sqrt{\rho_2}\frac{\partial\nu_2}{\partial t}\right)e^{i\nu_2}=k\sqrt{\rho_1}\,e^{i\nu_1}+\mu_2\sqrt{\rho_2}\,e^{i\nu_2} \tag{2.4b}$$

将式(2.4a)两边乘以 $2\sqrt{\rho_1}\,e^{-i\nu_1}/\hbar$，然后利用恒等式：

$$e^{i(\nu_2-\nu_1)}=\cos(\nu_2-\nu_1)+i\sin(\nu_2-\nu_1)$$

再使等式两边的实部和虚部分别相等，即可得到 $\partial\rho_1/\partial t$、$\partial\nu_1/\partial t$ 的方程；对式(2.4b)作类似的处理，可以得到 $\partial\rho_2/\partial t$、$\partial\nu_2/\partial t$ 的方程。这些方程为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\rho_1}{\partial t}&=-\frac{\partial\rho_2}{\partial t}=\frac{2k}{\hbar}\sqrt{\rho_1\rho_2}\sin(\nu_2-\nu_1)\\ \frac{\partial\nu_1}{\partial t}&=-\frac{k}{\hbar}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\cos(\nu_2-\nu_1)-\frac{\mu_1}{\hbar}\\ \frac{\partial\nu_2}{\partial t}&=-\frac{k}{\hbar}\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\cos(\nu_2-\nu_1)-\frac{\mu_2}{\hbar}\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

式中 $\partial\rho_1/\partial t$ 为超导体 1 中库柏电子对密度的时间变化率，它正比于单位时间内从超导体 2 转移到超导体 1 的库柏电子对数目，因而正比于从超导体 2 到超导体 1 的电流密度，即

$$j_s=j_c\sin\theta \tag{2.6}$$

j_s 被称为约瑟夫逊电流密度，j_c 为约瑟夫逊电流密度的最大值，叫临界电流密度，$\theta=\nu_2-\nu_1$ 是超导体 2 和 1 之间的位相差。式(2.6)就是我们要推导的电流密度和位相差的关系。

若超导体 1 和 2 是相同材料的，此时，$\rho_1=\rho_2$，由式(2.5)不难求出位相差的时间变化率：

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\nu_2-\nu_1)=(\mu_1-\mu_2)/\hbar$$

如果超导体 1 和 2 间的电压为 V，那么超导体 1 和 2 中的库柏电子对的能量差为：

$$\mu_1-\mu_2=2eV$$

合并以上两式，得到，

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{2e}{\hbar}V=\frac{2\pi}{\phi_0}V \tag{2.7}$$

这就是我们要推导的量子位相差和电压的关系。

利用超导结的基本方程式(2.6)和(2.7)，容易解释超导结的无阻载流能力和辐射电磁波现象。

由式(2.7)，$V=0$ 时，位相差 θ 应当等于常数。令该常数为 θ_0，由式(2.6)得到：

$$j_s=j_c\sin\theta_0 \tag{2.8}$$

此式表明，当超导结两端不存在电压时，仍然可以有电流通过超导结，因此，这个电流应该是超流。此超流是库柏电子对的隧道过程产生的约瑟夫逊电流。

将式(2.8)对结平面积分，便得通过超导结的约瑟夫逊电流 I_s，

$$I_s=I_c\sin\theta_0 \tag{2.9}$$

式中 I_c 为超导结的临界电流。I_c 的大小和超导结的形式、材料、尺寸及制作工艺有关。每一超导结都有它自己特有的临界电流。各种超导结的临界电流在 0.1 μA 到几十 mA之间。超导量子干涉器中的超导结的 I_c 应为 μA 的量级。

当超导结两端加一恒定电压 V 时，由式(2.7)，得到位相差和电压的关系为：

$$\theta = -\frac{2e}{\hbar}Vt \tag{2.10}$$

这里为简单起见，令积分常数为零。将上式代入式(2.6)，得到，

$$j_s = j_c \sin\omega t = j_c \sin 2\pi ft \tag{2.11}$$

其中

$$\omega = 2\pi f, \qquad f = \frac{2e}{h}V$$

此式表明，结中的电流是频率为 $2e/hV$ 的正弦电流。因为 $2e/h = 483.6\ \mathrm{MHz}/\mu\mathrm{V}$，当 V 在几十微伏和几毫伏之间时，电流频率应在微波到远红外范围。由电动力学可知，超导结向外界辐射同频率的电磁波。

产生此高频电流的机理在于：当超导结两侧加有电压 V 时，结两侧超导体中的库柏电子对存在着能量差 $2eV$，库柏电子对从一侧转移到另一侧时，伴随着发射和吸收光子的过程。由能量守恒定律知，光子频率为 $2eV/h$。

然而，单单利用在超导结上加恒定电压的方法，所产生的电磁波是微弱的。为了产生较强的电磁波，还需在超导结上加磁场[1]。

§2.3 超导结的伏安特性

一、伏安特性的测量

测量超导结的伏安特性时，是用直流电表或低频电表，它们对高频电压及电流无反应，其指示值为结电流和结电压的时间平均值。这个平均电流和平均电压间的关系叫做超导结的直流伏安特性，简写为 I—V 特性。

I—V 特性曲线的形状取决于超导结和电源内阻。

对于同一超导结，利用恒流源得到的 I—V 特性曲线与利用非恒流源得到的 I—V 特性曲线很不相同。

超导结的结电阻一般只有 0.01～10Ω，通常比电源内阻要小得多，因而电源更接近恒流源，为此，我们仅讨论恒流源 I—V 特性。图 2.1 示出两个超导结的 I—V 特性曲线。它们都包括 $V=0$ 和 $V>0$ 两部分，但曲线的形状很不相同。对于图 2.1a，在 $V>0$ 部分，每一个 V 相应一个 I，即没有回滞。对于图 2.1b，增加电压和减小电压时的电流并不相同，I—V 特性曲线是一条环线，这样的超导结具有回滞。下面我们将要指出，SQUID 中的超导结的 $I-V$ 特性曲线应当是没有回滞的。

现在我们对这些实验结果作理论分析。

二、恒流源偏置的超导结的动态特性[3]

图 2.2 示出超导结的等效电路。超导结被等效成理想超导结、结电阻 R、结电容 C 的并联支路，理想超导结满足以下方程式：

$$I_s = I_c \sin\theta \tag{2.12}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{\phi_0}V \tag{2.13}$$

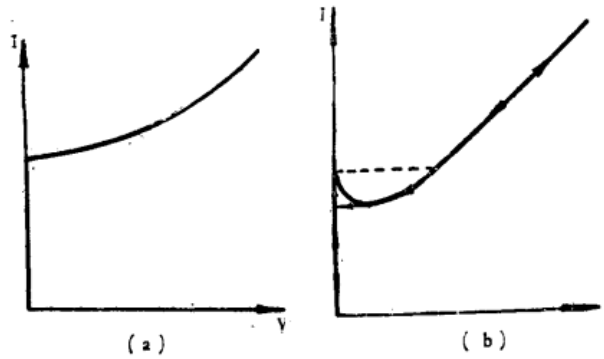


图 2.1 利用恒流源测得的两个超导结的伏安特性

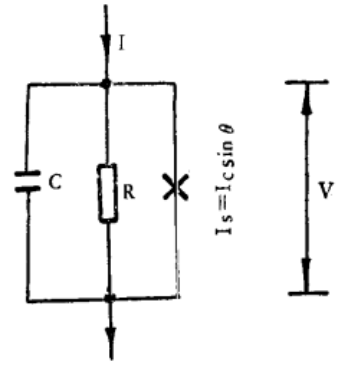


图 2.2 超导结的等效电路

由式 (2.12-2.13) 得到：

$$V=\frac{\phi_0}{2\pi I_c\cos\theta}\frac{dI_s}{dt}$$

将此式跟一电感为 L 的线圈的电流 I 和电压 V 间的关系式 $\left(V=L\frac{dI}{dt}\right)$ 相比较，即可看出，理想超导结相当于一个电感 $\phi_0/2\pi I_c\cos\theta$，这个电感随结两端电压或量子位相差而变化。$\phi_0/2\pi I_c$ 为它的有效电感，用符号 L_s 表示，

$$L_s=\frac{\phi_0}{2\pi I_c} \tag{2.14}$$

这样以来，一个实际超导结的等效电路由三个环路组成，即结电阻 R 和结电容 C 组成的环路、结电感 L_s 和结电阻 R 组成的环路、结电感和结电容组成的环路，它们的时间常数分别为：

$$\tau_1=RC \tag{2.15}$$

$$\tau_2=L_s/R=\phi_0/2\pi RI_c \tag{2.16}$$

$$\tau_3=(L_sC)^{\frac{1}{2}}=(\tau_1\tau_2)^{\frac{1}{2}} \tag{2.17}$$

τ_1 表征结电容上的电荷的充放电速度，τ_2 表征约瑟夫逊电流的变化速度。τ_3^{-1} 为约瑟夫逊等离子体振荡频率。τ_1、τ_2 和回滞参量 β_c[式(0.1)]的关系为：

$$\beta_c=\frac{\tau_1}{\tau_2} \tag{2.18}$$

如果超导结中通有直流电流 I，则超导结两端的电压将随时间 t 变化。方程式为：

$$C\frac{dV}{dt}+\frac{V}{R}+I_c\sin\theta=I \tag{2.19}$$

$$V=\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{d\theta}{dt}$$

这个方程式的解即 V 和 t 的关系式与 τ_1、τ_2、τ_3 有关。用无量纲量

$$\tau=\frac{t}{\tau_3} \tag{2.20}$$

量度时间，则式(2.19)化简为：

$$\ddot{\theta}+G\dot{\theta}+\sin\theta=i_0 \tag{2.21}$$

式中

$$\ddot{\theta}=\frac{d^2\theta}{d\tau^2},\quad \dot{\theta}=\frac{d\theta}{d\tau},\quad i_0=-\frac{I}{I_c}$$

$$G=\frac{\tau_3}{\tau_1}=\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\tau_2}{\tau_3}=\beta_c^{-\frac{1}{2}} \tag{2.22}$$

式(2.21)是一个较复杂的非线性微分方程式，不能求得解析解，必须用数值计算，才能得到 $\theta-t$ 的关系。但因 θ 是一个比较抽象的物理量，很难从数值解建立明确的物理图象，并很难预言其他情况。为直观起见，文献[4,5]中用复摆力学模拟方法来了解这个方程式及方程式的解。

复摆的运动方程式为：

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+\eta\frac{d\theta}{dt}+mgl\sin\theta=M \tag{2.23}$$

式中 J 和 m 为复摆的转动惯量和质量，l 为复摆重心到转轴的距离，θ、$d\theta/dt$、$d^2\theta/dt^2$ 分别为复摆的角位置、角速度和角加速度。$mgl\sin\theta$ 为重力力矩，g 为重力加速度，$\eta\frac{d\theta}{dt}$ 为阻力力矩，η 为阻尼系数，M 为外加恒力矩。令 $i_0=M/mgl$，$G=\eta/(mgIJ)^{\frac{1}{2}}$，$t=(J/mgl)^{\frac{1}{2}}\tau$，则式(2.23)化简为(2.21)，因此，我们可以通过更为直观、熟悉的复摆运动来了解量子位相差和结电压随时间的变化规律，为此，只需将 θ，$\dot{\theta}$，$\ddot{\theta}$，G，i_0，$\sin\theta$ 理解成角位置，角速度，角加速度，阻尼系数，外加力矩，重力力矩便可以了。

将式(2.21)改写成：

$$\ddot{\theta}+G\dot{\theta}=i_0-\sin\theta \tag{2.24}$$

此式右端为“外力矩”和“重力矩”的代数和，可以用一个势能函数 U 来表示，

$$-\frac{dU}{d\theta}=i_0-\sin\theta \tag{2.25}$$

积分后得到：

$$U=-i_0\theta-\cos\theta \tag{2.26}$$

在此，为简便起见，令积分常数为0。

图2.3示出 $-dU/d\theta$—θ 曲线，它是由直线 $y_1=i_0$ 和曲线 $y_2=\sin\theta$ 合成的。下面将看到，$i_0>1$ 和 $i_0<1$ 的解有着很大的差别，必须分别讨论。

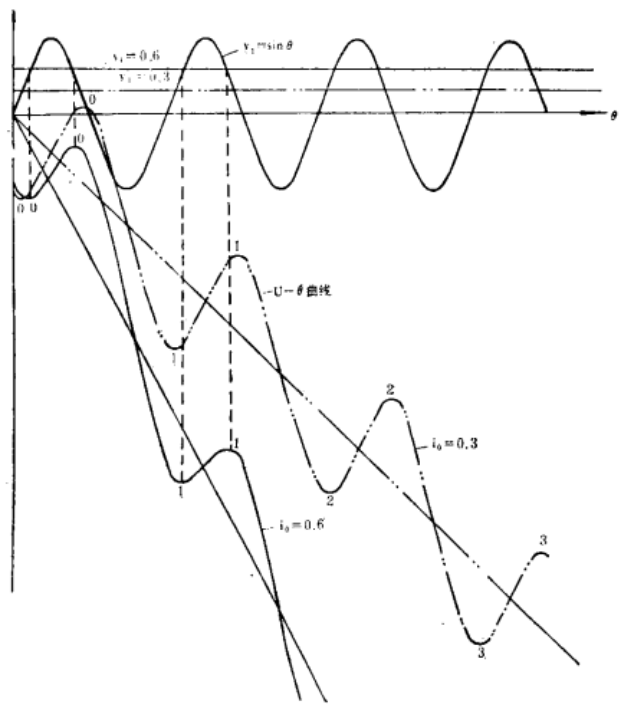


图 2.3　超导结的 U—θ 曲线和 $dU/d\theta-\theta$ 曲线

1．$i_0>1$ 时式(2.21)的解

$i_0>1$ 时，曲线 y_1 和 y_2 没有交点，即 $dU/d\theta\neq0$，于是 $U-\theta$ 曲线上没有极值。这表明，该方程式不管它的初始条件(即 $\tau=0$ 时的 θ 和 $\dot{\theta}$ 值 θ_0 和 $\dot{\theta}_0$)如何，只能有旋转解，即随时

间 t 的增加 θ 不断增加的解。这是因为 $i_0>1$ 意味着外力矩大于重力矩的最大值，合外力力矩一直作正功。设 $\tau=0$ 时，$\theta_0=0$，$\dot{\theta}_0=0$。复摆每旋转一周内，合外力矩的功除去补偿阻力消耗的能量外，还有富裕，于是，复摆的动能增加即 $\dot{\theta}$ 增加。$\dot{\theta}$ 增加时，阻力力矩跟着增加，消耗的能量也增加，因此，$\dot{\theta}$ 不能无限制增加，待每转中阻力消耗的能量等于外力矩所做的功时，平均角速度和平均动能便不再增加。但因这是一个旋转运动，在每转中的各个时刻的速度却是变化的。在第一、二象限[$\theta=2\pi n\sim 2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$，$n=0,1,2,\cdots\cdots$]，由于重力矩 $mgl\sin\theta$ 和外力矩反向，$\dot{\theta}$ 逐渐减小。$\theta\approx 2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$，$\dot{\theta}$ 最小，在第三、四象限[$\theta=2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\sim 2\pi(n+1)$，$n=1,2,3\cdots\cdots$]，由于重力矩和外力矩同向，$\dot{\theta}$ 逐渐增加。$\theta\approx 2\pi(n+1)$时，$\dot{\theta}$最大。平均角速度$\langle\dot{\theta}\rangle$、最大角速度 $\dot{\theta}_{max}$、最小角速度 $\dot{\theta}_{min}$、旋转周期 T 是 i_0 和 G 的函数。分三种情况讨论如下：

(1) 强阻尼情况

G 很大表示强阻尼情况。

设 $\tau=0$ 时，$\theta_0=0$，$\dot{\theta}_0=0$。此后，复摆在外力矩及重力力矩联合作用下加速，$\dot{\theta}$ 增加。但因阻尼很强，$\dot{\theta}$ 增加得很慢，且不会很大，待起始过程完结，进入稳定振荡过程即每转中阻力消耗的能量等于外力矩的功后，$\langle\dot{\theta}\rangle$不变化，在第一、二象限，$\theta$从 $2\pi n$ 到 $2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$ 的过程中，$\dot{\theta}$ 从很小的极大值几乎减到 0，θ 从 $2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$到$2\pi(n+1)$的过程中，$\dot{\theta}$ 再从几乎等于 0 增加到很小的极大值。以后，如此重复循环不已，即 $\dot{\theta}_{max}$ 和 $\dot{\theta}_{min}$ 较小，($\dot{\theta}_{max}-\dot{\theta}_{min}$)较小。同理，由于 $\dot{\theta}$ 小，振荡周期很长。可见，$\dot{\theta}-t$ 曲线即结电压和时间的关系曲线应当是波动幅度小、振荡周期大、平均值小的曲线。对于给定的 i_0，G 变大时，由于阻尼变大，$\langle\dot{\theta}\rangle$变小，($\dot{\theta}_{max}-\dot{\theta}_{min}$)变小，$T$ 变大，在一个振荡周期内 θ 从 $2\pi n$ 到 $2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$ 的时间比 $T/2$ 小许多。对于给定的 G，i_0 变小时，由于外力矩变小，这些量也作同样的变化。

(2) 弱阻尼情况

G 很小表示弱阻尼情况。

设初始条件还是：$\tau=0$时 $\dot{\theta}_0=\theta_0=0$。随后，复摆加速，$\dot{\theta}$ 增加，但因阻尼很弱，$\dot{\theta}$ 增加得很快，且可以增加到很大数值。待起始过程结束，进入稳定振荡过程后，$\langle\dot{\theta}\rangle$不变。$\theta$从$2\pi n$到$2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$的过程中 $\dot{\theta}$ 减得不多；θ 从 $2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$到$2\pi(n+1)$的过程中 $\dot{\theta}$ 增得也少，因此 $\dot{\theta}-\tau$ 曲线即结电压随时间变化的曲线是一条 $\dot{\theta}_{max}$ 和 $\dot{\theta}_{min}$ 很大、($\dot{\theta}_{max}-\dot{\theta}_{min}$) 较小、$\langle\dot{\theta}\rangle$ 很大、T很小的曲线。在一个振荡周期内，θ 从 $2\pi n$ 到 $2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$的时间稍大于 θ 从 $2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$到 $2\pi(n+1)$的时间。对于给定的 i_0 而 G 愈小或对于给定的 G 而 i_0 愈大时，T 和($\dot{\theta}_{max}-\dot{\theta}_{min}$)愈小，$\langle\dot{\theta}\rangle$愈大，$\theta$ 从 $2\pi n$ 到 $2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$的时间和 θ 从$2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$到$2\pi(n+1)$的时间

与 $T/2$ 的差愈小。

(3) 中等阻尼

这属于上述强阻尼和弱阻尼间的过渡情况。

现在再从电路角度进行研究。

电阻尼很强意味着：$G>>1$，或 $G^2>>G>>1$，或 $\tau_2/\tau_1>>\tau_3/\tau_1>>1$，或 $\tau_2>>\tau_3>>\tau_1$。由于 $\tau_2>>\tau_1$，在极限情况下可以认为结电容支路是断开的，超导结成为理想超导结和结电阻的并联支路。由于偏置电流是恒稳电流，理想超导结中的电流是时间的周期性函数，故通过结电阻的电流及结电压也是时间的周期性函数。又因超导结是非线性元件，该结电压中必然含有直流分量和交流分量，而交流分量中含有无限多个谐波分量。一个振荡周期内 θ 从 $2\pi n$ 到 $2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$ 的时间比 θ 从 $2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$ 到 $2\pi(n+1)$ 的时间长意味着：就时间平均值来说，理想超导结中有一个正向超流 $\left[\theta=2\pi n\sim 2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right),\ \sin\theta\geqslant 0\right.$，理想超导结中的电流 $(I_s=I_c\sin\theta)$ 为正，$\left.\theta=2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\sim 2\pi(n+1)\right.$ 时电流为负$\left.\right]$，流经结电阻的电流小于 I，于是，结电压的直流分量即长时间平均值小于 I 全部流经结电阻时的电压 V，$V=RI$，用无量纲量表示此式，得到：$\langle\dot{\theta}\rangle=i_0/G$。

电阻尼很弱意味着：$G<<1$，或 $G^2<<G<<1$ 或 $\frac{\tau_2}{\tau_1}<<\frac{\tau_3}{\tau_1}<<1$，或 $\tau_2<<\tau_3<<\tau_1$。由于 $\tau_1>>\tau_2$，结电容中的位移电流变化速度比理想超导结中的约瑟夫逊电流变化速度慢得多，在极限情况下，可以认为理想超导结支路是断开的，超导结的等效电路成为结电容和结电阻的并联支路。于是，象通常的阻容电路，超导结两端的电压随时间按指数规律增长，特征时间常数为 τ_1。超导结两端电压饱和值为 $V=IR$，即结电压的长时间平均值为：$\langle\dot{\theta}\rangle=i_0/G$。

中等电阻尼意味着：$\tau_2\lesssim\tau_3\lesssim\tau_1$ 或 $\tau_2\gtrsim\tau_3\gtrsim\tau_1$，三个环路的作用不相上下，不允许作断开任一支路的近似，$\dot{\theta}$—τ 曲线可以被认为是指数增长曲线和振荡曲线的迭加。G 从较小值增加时，$\dot{\theta}-\tau$ 曲线上的波动幅度逐渐增加，到某一极大值后又逐渐减小，而振荡周期则愈来愈长，平均值愈来愈小，θ 从 $2\pi n$ 到 $2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$ 时间和从 θ 从 $2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$ 到 $2\pi(n+1)$ 的时间差愈大，最后过渡到强阻尼情况。

下面将指出，G 约等于和大于 1.2 属强阻尼，G 约等于和小于 0.1 属弱阻尼，$G\approx 0.1\sim 1.2$ 属中等阻尼。

2. $i_0<1$ 时式(2.21)的解

$i_0<1$ 时，直线 y_1 和曲线 y_2 相交，在交点，$dU/d\theta=0$，$U-\theta$ 势能曲线上有极大值和极小值，它们分别相应于势垒顶点和势阱底点，复摆的运动不仅和 i_0、G 的大小有关，而且还和初始条件即 $\dot{\theta}_0$ 和 θ_0 的大小有关。有以下几种典型情况。

(1) $\theta_0=2\pi n+\sin^{-1}i_0$ $(n=0,1,2,\cdots\cdots)$ 和 $\dot{\theta}_0=0$

这时，式(2.21)的解为：

$$\theta=2\pi n+\sin^{-1}i_0 \qquad (n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

$$\dot{\theta} \equiv 0$$

即 θ 等于一个常数，角速度等于 0。这相当于复摆所受重力力矩和外加常力矩平衡，复摆停在势阱底点。

与之相应的超导结的情况是外加偏置电流 I 全部从理想超导结中通过，即全部成为超流，结两端没有电压。零压电流 $I = I_c \sin\theta_0$ 或 $i_0 = \sin\theta_0$。

(2) $\theta_0 = 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \sin^{-1} i_0$ 和 $\dot{\theta}_0 = 0$

这时，式(2.21)的解为：

$$\theta = 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \sin^{-1} i_0$$

$$\dot{\theta} \equiv 0$$

它相当于复摆处在势垒顶点，这是一个不稳定平衡位置，当受到一个微扰后，复摆将离开这个位置，一般不会回复到这个位置。

(3) 初始条件不同于 $\theta_0 = 2\pi n + \sin^{-1} i_0$ 和 $\dot{\theta}_0 = 0$ 或 $\theta_0 = 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \sin^{-1} i_0$ 和 $\dot{\theta}_0 = 0$ 时

这时，式(2.21)象 $i_0 > 1$ 时那样具有旋转解，但也可能是衰减解，视 i_0 和 G 的大小以及初始条件而定，现以 $\theta_0 = \pi - \sin^{-1} i_0$，$\dot{\theta}_0 = 0.1$ 为例加以说明。这个 θ_0 表示复摆开始时位于第 0 号势垒顶点，$\dot{\theta}_0 = 0.1$ 表示很小的正向扰动。由 $U - \theta$ 曲线可知，从一个势阱底点到相邻势垒顶点且 $\frac{dU}{d\theta} > 0$ 的区域，外力矩小于重力矩，不计阻力时为减速区；从一个势垒顶点到下一个相邻势阱底点且 $dU/d\theta < 0$ 的区域，外力矩大于重力矩，不计阻力时为加速区。i_0 愈大，加速区愈大，减速区愈小，且势阱和相邻势垒间的能量差愈小，因此，当 i_0 足够大和 G 足够小时，复摆从第 0 号势垒顶点出发，可以运动到第 1 号势垒顶点，通过该势垒顶点时的速度大于 0，于是，它相继越过各个势垒，形成持续的旋转运动，亦即 i_0 大和 G 小时，式 (2.21) 有旋转解；反之，如果 i_0 不够大，G 不够小，则复摆还没有到达第 1 号势垒顶点时，便消耗掉全部动能，速度变成 0，它只能反向运动，围绕势阱底点作衰减振荡，直到停在该势阱底点。进而，如果 i_0 很小，G 很大，则复摆从第 0 号势垒顶点以很小的初速度出发，速度缓慢地增加，待增到一个很小的极值后又单调地减到 0，复摆沿单一方向趋近于势阱底点，并停在该势阱底点。

初始条件也影响式(2.21)解的性质。如果 θ_0 邻近某势阱底点，$\dot{\theta}_0$ 较小，则复摆围绕该势阱底点作衰减振荡(G 小时)或沿单一方向趋近于该势阱底点(G 较大时)；反之，如果 θ_0 邻近一势垒顶点，$\dot{\theta}_0$ 很大，G 很小，则复摆可以相继地越过许多势垒，形成持续的旋转运动。

从电路上来看，振荡式衰减和单一方向衰减均表示：电路接通很久，起始过程已结束后，偏置电流全部沿理想超导结流动，结电容和结电阻中无电流，结电压为 0，超导结的直流 $I - V$ 特性曲线上有零压电流部分。此时偏置电流从 0 到 I_c 或 i_0 从 0 到 1。旋转解表示：电路接通很久，起始过程结束，超导结两端有周期性的振荡电压。该电压的平均值 $\langle\dot{\theta}\rangle$，波动幅度 $(\dot{\theta}_{max} - \dot{\theta}_{min})$、振荡周期 T、一个振荡周期内 θ 从 $2\pi n$ 到 $2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$ 的时间和从 2π

$\left(n+\frac{1}{2}\right)$到 $2\pi(n+1)$的时间差与 i_0 和 G 的关系，跟 $i_0>1$ 时相同。弱阻尼时，结电压的长时间平均值 $\langle\dot{\theta}\rangle \approx \frac{i_0}{G}$，即 i_0 和 $\langle\dot{\theta}\rangle$ 成线性关系。强阻尼时，只是在 i_0 接近 1 时才有很小的结电压。

以上定性分析已被数值计算结果证明。

图 2.4～2.7 示出一些典型情况下的数值计算结果。图 2.4 是 $i_0=1.2$，1.0，0.8，G 为

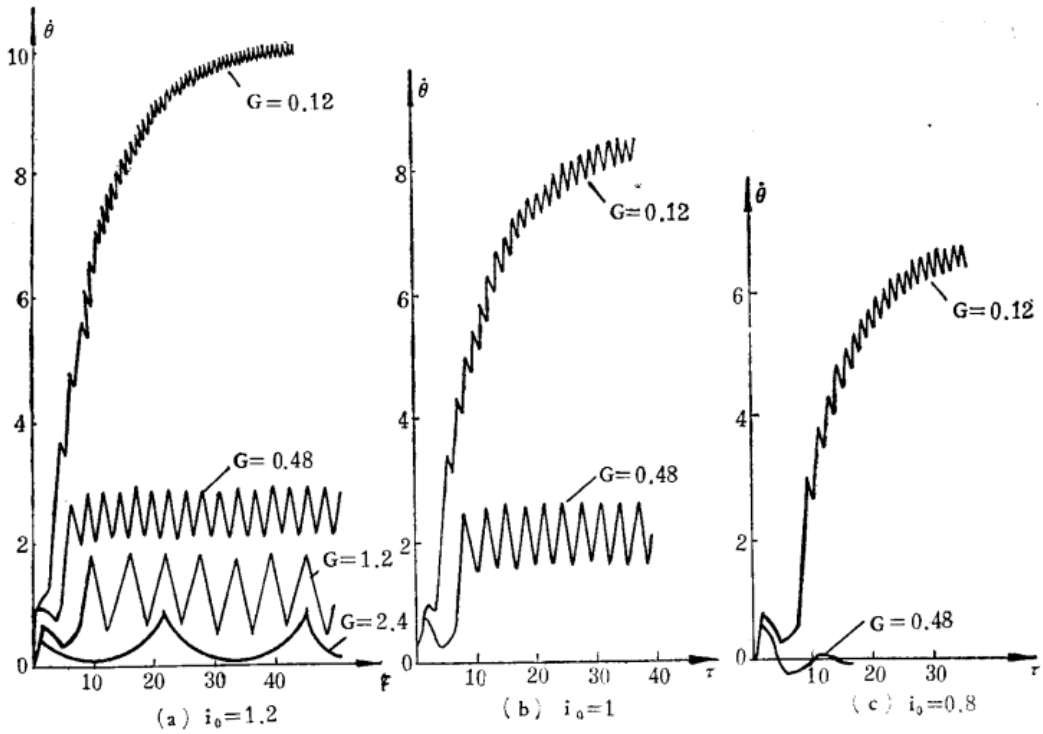


图 2.4　$i_0=1.2,1.0,0.8$；G 为参变量；$\dot{\theta}_0=\theta_0=0$ 的 $\dot{\theta}-\tau$ 曲线

参变量，$\dot{\theta}_0=\theta_0=0$ 时的 $\dot{\theta}-\tau$ 曲线。图 2.5 是 $i_0=1.2$，G 为参变量，在一个稳定振荡周期内的 $\dot{\theta}-\tau$ 曲线和 $\theta-\tau$ 曲线。图 2.6 是 $i_0=1.2$ 时，$\langle\dot{\theta}\rangle$、$T$、$(\dot{\theta}_{max}-\dot{\theta}_{min})$和 G 的关系曲线。图 2.7 是 G 为参变量的 $i_0-\langle\dot{\theta}\rangle$ 曲线即超导结的直流 $I-V$ 特性曲线。表 2.1 示出 $\dot{\theta}-\tau$ 曲线起始段的一些数据。现在我们对这些结果讨论如下。

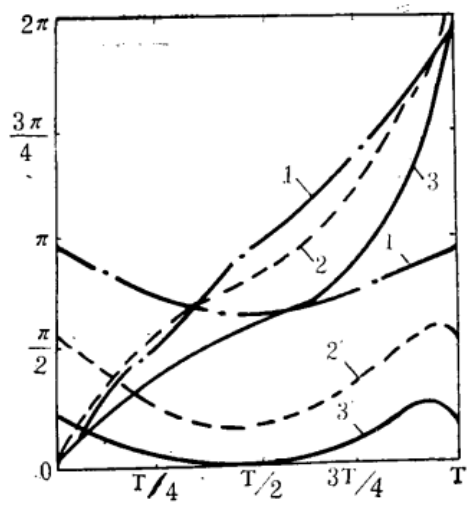


图 2.5　$i_0 = 1.2$，G 为参变量，在一个稳定振荡周期内的 $\dot{\theta}$—τ 曲线和 θ—τ 曲线

曲线 1,2,3 分别为 $G = 0.48$，0.96，2.4 的 θ—τ 曲线

曲线 1′,2′,3′ 分别为 $G = 0.48, 0.96, 2.4$ 的 $\dot{\theta}$—τ 曲线

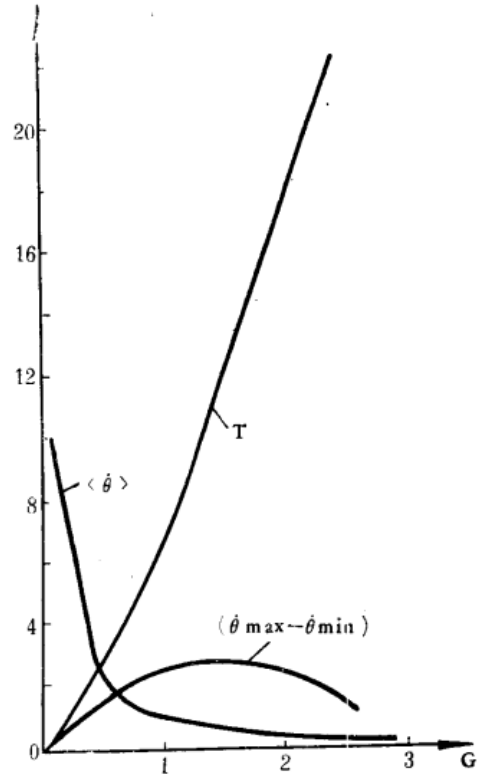


图 2.6　$i_0 = 1.2$ 时，$\langle\dot{\theta}\rangle$、$T$、$(\dot{\theta}_{max} - \dot{\theta}_{min})$ 和 G 的关系曲线

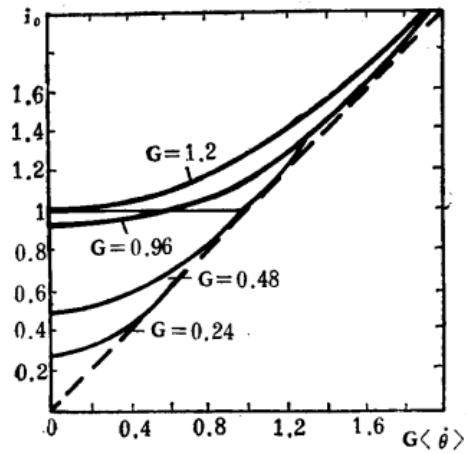


图 2.7　超导结的 $I-V$ 特性曲线

表 2.1

序号 n	$i_0=1.2,\ G=0.12$				$i_0=1.0,\ G=0.12$				$i_0=0.8,\ G=0.12$			
	τ	小峰高度	小谷高度	θ/π	τ	小峰高度	小谷高度	θ/π	τ	小峰高度	小谷高度	θ/π
1	—	–		—	1.7	0.9508		0.34	1.6	0.7473		0.24
	—		–	—	2.8		0.8761	0.66	4.9		0.2196	0.72
2	4.6	3.5808		2.27	5.5	3.2389		2.22	9.1	2.8853		2.11
	5.0		3.5231	2.73	6.1		3.0983	2.81	9.9		2.6167	2.81
3	6.2	4.6745		4.25	7.3	4.2089		4.23	11.2	3.7160		4.10
	6.6		4.5996	4.86	7.8		4.0503	4.86	11.9		3.4447	4.88
4	7.4	5.4361		6.15	8.7	4.8716		6.15	12.9	4.2641		6.14
	7.8		5.3307	6.85	9.2		4.6982	6.90	13.5		3.9908	6.90
5	8.5	6.0157		8.14	9.9	5.3643		8.05	14.3	4.6685		8.04
	8.9		5.8981	8.85	10.4		5.1840	8.90	14.9		4.3951	8.88
6	9.6	6.4782		10.2	11.1	5.7671		10.1	15.7	4.9903		10.1
	9.9		6.3557	10.8	11.5		5.5782	10.8	16.3		4.7151	10.9
7	10.5	6.8758		12.1	12.2	6.0925		12.1	17.0	5.2436		12.2
	10.8		6.7428	12.7	12.6		5.8940	12.8	17.5		4.9635	12.9

1，起始过程

由 $\dot{\theta}-\tau$ 曲线可以看出，它的起始部分和 i_0、G、$\dot{\theta}_0$、θ_0 有关。对于给定的 i_0，$\dot{\theta}_0=\theta_0=0$，$G$ 不同时，起始部分是不相同的。G 约小于 0.1 时，起始过程很长，在这段时间内，θ 增加了许多个 2π，相应于复摆旋转许多转后才接近于稳定振荡过程。$\dot{\theta}-\tau$ 曲线上升段上的小峰和相邻的小谷表示：θ 每增加 2π 的过程中，$\dot{\theta}$ 并不是随时间单调增加的。小峰和相邻小谷的序号愈大表示它们出现的时间愈晚。

对于给定 i_0、G、$\dot{\theta}_0$、θ_0 的曲线即特定的 $\dot{\theta}-\tau$ 曲线，两个相邻小峰或小谷的序号愈大，它们间的时间也愈小，最后趋向稳定振荡电压的振荡周期。

对于给定 i_0、$\dot{\theta}_0$、θ_0 而 G 不同的 $\dot{\theta}-\tau$ 曲线族，G 愈大，相同序号的小峰或小谷出现时刻愈晚，相同序号的小峰和相邻小谷间的时间愈大，相同序号的二个小峰或小谷间的时间愈大。

对于给定 G、$\dot{\theta}_0$、θ_0 而 i_0 不同的 $\dot{\theta}-\tau$ 曲线族，i_0 愈大，相同序号的小峰或小谷出现时刻愈早，相同序号的小峰和相邻小谷间的时间愈小，相同序号的二个小峰或小谷间的时间愈小。

各个小峰或小谷出现时刻的 θ 一般不等于 $2\pi n$ 或 $2\pi(n+1/2)$。

2．稳定电压振荡过程

由 $\dot{\theta}$—τ 曲线还可以看出，起始过程结束后，稳定电压振荡过程便开始了。在这个过程中，$\dot{\theta}-\tau$ 曲线和 i_0、G 有关，但和 $\dot{\theta}_0$、θ_0 无关。

对于给定的 i_0，G 从很小的值单调增加时，结电压的振荡周期迅速单调增加；波动幅度由小变大，再变小，有一个平坦的极大值，结电压的长时间平均值先迅速减小，而后再缓慢减小。

对于给定的 G，i_0 单调减小时，振荡周期和波动幅度单调增加，结电压的长时间平均值单调减小。

在一个振荡周期内，θ 从 $2\pi n$ 到 $2\pi(n+1/2)$ 的时间大于 $T/2$，θ 从 $2\pi(n+1/2)$ 到 $2\pi(n+1)$ 的时间小于 $T/2$。G 愈大，与 $T/2$ 的偏离愈大。G 等于和大于 0.96 时有明显偏离。G 等于或小于 0.48 时，偏离已经不太明显。

在一个振荡周期内，振荡电压最大值对应的 θ 稍小于 $2\pi n$，最小值对应的 θ 稍小于 $2\pi(n+1/2)$。G 愈大，与 $2\pi n$ 或 $2\pi(n+1/2)$ 的偏离愈大。G 小于 0.96 时，偏离较小。

振荡电压的波形和 G 的关系很大，G 等于或大于 2.4 时，振荡电压波形明显地偏离于正弦波，其中的高次谐波分量很多。

$i_0=1$ 时，直线 y_1 和曲线 y_2 相切，$U-\theta$ 势能曲线上没有极值，在 $\theta=2\pi n+\pi/2$ 时为拐点。这相应于重力矩的最大值等于外力矩，复摆在每转中，这两个力矩的合力矩除了 $\theta=2\pi n+\pi/2$ 这些点外均为正值，它应当是持续的旋转运动。但因 G 稍微增加时，振荡周期便增加很多，故 G 较大时，振荡周期较大，结电压的长时间平均值很小，可以视为衰减情况。我们的计算指出，$G=0.96$ 时，$\tau=300$ 的 $\dot{\theta}=2.0417\times10^{-7}$，$\theta=1.57017$，还没有到第一个拐点 $(\theta=\pi/2)$。

由图 2.7 可知，$i_0>1$ 时，对于给定的 i_0，G 愈大，$\langle\dot{\theta}\rangle$ 愈小；对于给定的 G，i_0 愈大，

则$\langle\dot{\theta}\rangle$愈大。$i_0 \leqslant 1$时，$G$从很小的值开始增加时，回滞效应逐渐减小，$G$约等于或大于1时，回滞效应已不明显。

由以上定性分析和定量计算可以得到以下结论：

.1 复摆模拟方法具有直观、形象、易于想象和推理等优点，不解方程式就可以推论出各种G、i_0、$\dot{\theta}_0$、θ_0时的$\dot{\theta}-\tau$曲线的大致情况即定性关系。数值计算方法可以给出它们间的定量关系，但需用电子计算机作大量计算，经过归纳分析后才能得到超导结的全部性质，计算工作量很大。将两种方法结合起来可以取长补短，在定性分析基础上对一些典型情况作些计算，便可以准确地解释$\dot{\theta}-\tau$曲线上的小峰小谷先后、高低、宽窄等细节，并可以推断未经数值解的其他情况。

2．G和i_0这两个量在决定式(2.21)的解是衰减解还是振荡解方面所起的作用是相反的。对振荡电压周期、波动幅度、平均值及一个振荡周期内θ从$2\pi n$到$2\pi(n+1/2)$的时间和从$2\pi(n+1/2)$到$2\pi(n+1)$的时间的影响也是相反的。

3．G是超导结的阻尼参量。G约等于和大于1.2时，振荡电压的长时间平均值已接近$G\gg 1$时的值，回滞效应已较小。故$G\gtrsim 1.2$是强阻尼情况。

G约等于或小于0.1时，振荡电压的长时间平均值已接近$G\ll 1$时的值，且波动很小，忽略波动分量后，$\dot{\theta}-\tau$曲线已成为以τ_1为特征时间常数的指数上升曲线，故$G\lesssim 0.1$是弱阻尼情况。

超导量子干涉器中超导结的G的最佳值约等于1.2。为此，必须适当的选择超导结的几何形状、尺寸、材料及制作工艺，使超导结的R、C、I_c值满足$G\approx 1$的条件。对于点接触结，必须将螺钉磨得很尖并适当调节它对平台的压力，使它和平台的接触面积很小，借以减小它的R、C及I_c。对于微桥结，则必须减小桥区的长、宽、厚以及桥区的形状，或者采用高电阻率的超导材料以及向桥区掺入杂质等。对于隧道结，必须减小隧道结的长和宽到亚微米的尺寸，这在工艺上是很困难的，因此，目前采用的方法是在隧道结旁蒸镀上一条和隧道结并联的膜，通常是金膜，当金膜电阻合适时便可以消除回滞。

三、$\cos\theta$项对超导结的动态特性的影响[6]

一般的说，超导结的电流位相关系并不是严格正弦式的，超导结通上直流电流I时，结两端的电压V由下式表示：

$$I=C\frac{dV}{dt}+\frac{V}{R}(1+\epsilon\cos\theta)+I_c\sin\theta \tag{2.27}$$

$$V=\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{d\theta}{dt}$$

式中ϵ为$\cos\theta$项的系数。其他符号的意义同前。继续使用推导式(2.21)时的无量纲量：

$$\tau=\left(\frac{2\pi I_c}{\phi_0 C}\right)^{1/2}t$$

$$i_0=\frac{I_c}{I}$$

$$G=\left(\frac{\phi_0}{2\pi R^2 CI_c}\right)^{1/2}$$

可将式(2.27)化简为：

$$i_0=\ddot{\theta}+G(1+\epsilon\cos\theta)\dot{\theta}+\sin\theta \tag{2.28}$$

$$\ddot{\theta}=\frac{d^2\theta}{d\tau^2}$$

$$\dot{\theta}=\frac{d\theta}{d\tau}$$

关于 cos 项系数 ϵ 的正负和大小问题，人们曾进行了许多理论研研和实验测定[7-9]，但结果并不一致，有的理论认为 $\epsilon>0$，$\lim_{V\to 0}\epsilon\to+1$，但大多数实验结果指出：$\epsilon<0$，$\lim_{V\to 0}\epsilon\to-1$。Pedersen[7]早期的测定结果是 $\epsilon<0$，而后来的测定结果是：当温度降低时，ϵ 先由0增加到一个正值，然后在较低温度时又减小到 -1。这些情况表明，要满意解释 ϵ 的正负和大小还有待于进一步研究。但不管怎样，ϵ 的值在 -1 和 $+1$ 之间是可以肯定的。

上面我们已经研究过 $\epsilon=0$ 时超导结电压和时间的关系，现在再研究 ϵ 从 -1 到 $+1$ 范围内变化时，超导结电压和时间的关系。

按复摆模拟方法，i_0 仍然表示外力矩，$\sin\theta$ 表示重力矩，$G(1+\epsilon\cos\theta)d\theta/d\tau$ 表示阻力矩。但与 $\epsilon=0$ 时不同。$\epsilon\neq 0$ 时，$G(1+\epsilon\cos\theta)$相当于和 θ 有关的阻尼系数。复摆受到一个变阻尼系数的阻力。由于$|\epsilon|\leqslant|$，$G(1+\epsilon\cos\theta)\geqslant 0$，即在整个旋转过程中除了 $\theta=2\pi n$ 的点外，复摆总受阻力作用。$i_0>1$ 时，由于外力矩大于重力矩的最大值，它们的合力矩的功总能补偿阻力的消耗。式(2.28)对于任一G值和任意初始条件仍然具有旋转解。但起始过程、进入稳定振荡过程后的平均电压、振荡周期、波动幅度，一个振荡周期内 $\dot{\theta}-\tau$、$\theta-\tau$ 关系却是不同的。

1．ϵ 值在 -1 和 0 之间时

$\epsilon<0$ 时，在第一、四象限，$\epsilon\cos\theta<0$，$G(1+\epsilon\cos\theta)<G$，阻尼系数比 $\epsilon=0$ 时的G要小。在第二、三象限，$\epsilon\cos\theta>0$，$G(1+\epsilon\cos\theta)>G$，阻尼系数比 $\epsilon=0$ 时的 G 要大。ϵ 愈接近 -1，在每转中阻尼系数的变化愈大，故对于给定的 G 和 i_0，$\epsilon=-1$ 时的 $\langle\dot{\theta}\rangle$、$\langle\dot{\theta}_{max}-\dot{\theta}_{min}\rangle$、$T$、一个振荡周期内的 $\dot{\theta}-\tau$ 和 $\theta-\tau$ 曲线与 $\epsilon=0$ 时的各相应量的差别最大。

另外，i_0 相同而 G 不同时，$\epsilon=-1$ 和 $\epsilon=0$ 时的$\langle\dot{\theta}\rangle$、$\langle\dot{\theta}_{max}-\dot{\theta}_{min}\rangle$、$T$、一个振荡周期内的 $\dot{\theta}-\tau$、$\theta-\tau$ 曲线间的差别也不同。这是因为 $G\gtrsim 2.4$ 时，$G(1+\epsilon\cos\theta)\gtrsim 1.2\sim 4.8$，在每转的所有各点，均处于强阻尼情况。$G\lesssim 0.06$ 时，$G(1+\epsilon\cos\theta)\lesssim 0.03\sim 0.12$，在每转的所有各点，均处于弱阻尼情况。$G=0.12\sim 1.2$ 时，$G(1+\epsilon\cos\theta)=(0.06\sim 0.24)\sim(0.60\sim 2.40)$，在每转中阻尼系数从强阻尼变成中等阻尼再变成弱阻尼，如此重复循环不已，即每转中的阻尼系数的变化范围复盖着强阻尼、中等阻尼和弱阻尼三个区域。

同理，G 相同而 i_0 不同时，$\epsilon=-1$ 和 $\epsilon=0$ 时的 $\langle\dot{\theta}\rangle$、$(\dot{\theta}_{max}-\dot{\theta}_{min})$、$T$的差别也不同，每转中的 $\dot{\theta}-\tau$、$\theta-\tau$ 关系也不同。

现在讨论这些量对 I-V 特性的影响。前面已经指出，$\epsilon=0$ 时，在一个振荡周期内，θ 从 $2\pi n$ 到 $2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$的运动过程中，由于重力矩做负功，相应的时间大于 $T/2$。从 2π

$\left(n+\frac{1}{2}\right)$到$2\pi(n+1)$的过程中，重力矩做正功，相应的时间小于$T/2$。这意味着就时间的平均值而言，理想超导结中有正向超流，结电阻中的电流小于外加电流I，结电压小于结电容和理想超导结断开仅保留结电阻时的结电压$\langle\dot{\theta}\rangle = i_0/G$。故$\epsilon=0$任一$G$和$i_0$值时的$i_0-\langle\dot{\theta}\rangle$曲线均在直线$\langle\dot{\theta}\rangle = i_0/G$的上方。$G$愈大，$i_0$愈小，则$\langle\dot{\theta}\rangle$距直线上的$\langle\dot{\theta}\rangle$愈远。反之，$G$愈小，$i_0$愈大，则愈接近该直线。对于同样的$G$和$i_0$但$\epsilon<0$时，由于阻尼系数的变化，系统在第一、二象限的时间相对于$\epsilon=0$时变短，在第三、四象限的时间变长。正向超流减小。当ϵ接近于-1时，甚至可以出现较大的反向超流；结电阻中的电流大于I，结电压可能大于$\langle\dot{\theta}\rangle = i_0/G$。$\epsilon$接近$-1$时的$i_0-\langle\dot{\theta}\rangle$曲线有可能移到直线$\langle\dot{\theta}\rangle = i_0/G$的下方。$\epsilon$接近0时，阻尼系数在第一到四象限的变化不大，故$i_0-\langle\dot{\theta}\rangle$接近$\epsilon=0$时的曲线。$\epsilon$从$-1$趋向0时，下移量变小，逐渐趋近于$\epsilon=0$时曲线。

$i_0<1$时，$U-\theta$势能曲线上有势阱和势垒。势阱底点在第一象限，势垒顶点在第二象限，对于$\epsilon=0$时式(2.21)刚好不是旋转解而是衰减解的i_0和G值。当$\epsilon<0$时，因第一、四象限阻尼系数变小复摆有可能闯过势垒而成为旋转解。ϵ愈接近-1则这种可能性愈大。这就是说，对于给定的G，ϵ愈接近-1，旋转解相应的最小i_0愈小，$i_0-\langle\dot{\theta}\rangle$曲线上的回滞愈大。

2．ϵ值在0和$+1$之间时

$\epsilon>0$时，$\langle\dot{\theta}\rangle$、$(\dot{\theta}_{max}-\dot{\theta}_{min})$、$T$、一个振荡周期内的$\dot{\theta}-\tau$和$\theta-\tau$关系、$i_0-\langle\dot{\theta}\rangle$曲线上的回滞情况相对于$\epsilon=0$时的变化，显然与$\epsilon<0$时相反，这是因为$\epsilon>0$时第一四象限的阻尼系数变大，第二、三象限的阻尼系数变小。$\epsilon=1$时的这些量与$\epsilon=0$时的对应量的差别最大。

以上定性分析已为数值计算结果证实。图2.8示出以G和ϵ为参变量的$i_0-\langle\dot{\theta}\rangle$曲线。此图清楚地表明：$\epsilon<0$时，回滞效应变强。$\epsilon>0$时，回滞效应变弱。

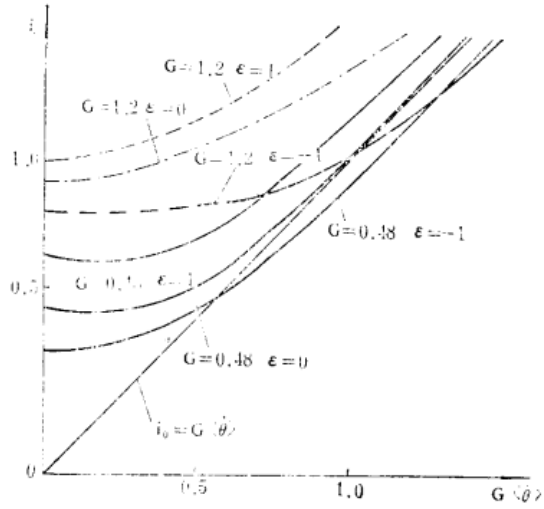


图2.8 超导结的$\cos\theta$项对它的伏安特性曲线的影响

参 考 文 献

[1] 吴杭生等，《超导电性》（第二类超导体和弱连接超导体），科学出版社，1979

[2] R. P. Feyman, *lecture on physics* Vol. Ⅲ, Chap. 21, Addison-Wesley, Roading, Massachusetts, 1965

[3] 王其俊等，低温与超导，第4期，38(1985)

[4] D. E. McCumber, *J. Appl. Phys.*, 39, 3113(1968)

[5] W. C. Stewart, *Appl. Phys. Lett.*, 12, 277(1968)

[6] 王其俊等，低温与超导，第3期，14(1986)

[7] N. F. Pedensen et al., *Phys. Rev.*, *B*6, 4151(1972)

[8] 姚希贤，物理学报，27，559(1978)

[9] 姚希贤，物理学报，28，416(1979)

第三章　射频超导量子干涉器

§3.1　实用结构

射频超导量子干涉器是由一个超导结和一块超导体构成的闭合环路，环孔的尺寸比超导体的穿透深度大很多。它的几种实用结构形式如图 3.1 所示。

图 3.1*a* 所示的是一种单孔点接触结 RF-SQUID 的截面图[1]。它是用铌长方体加工成的。铌长方体上钻一通孔，开一通槽，再沿横向旋入铌螺钉，铌螺钉和铌体形成点接触结。通常在液氦温度下调节螺钉，以得到最佳临界电流。这种器件可以多次地经受液氦——室温冷热循环而不必重调螺钉。输入线圈和射频谐振线圈就装在通孔内。

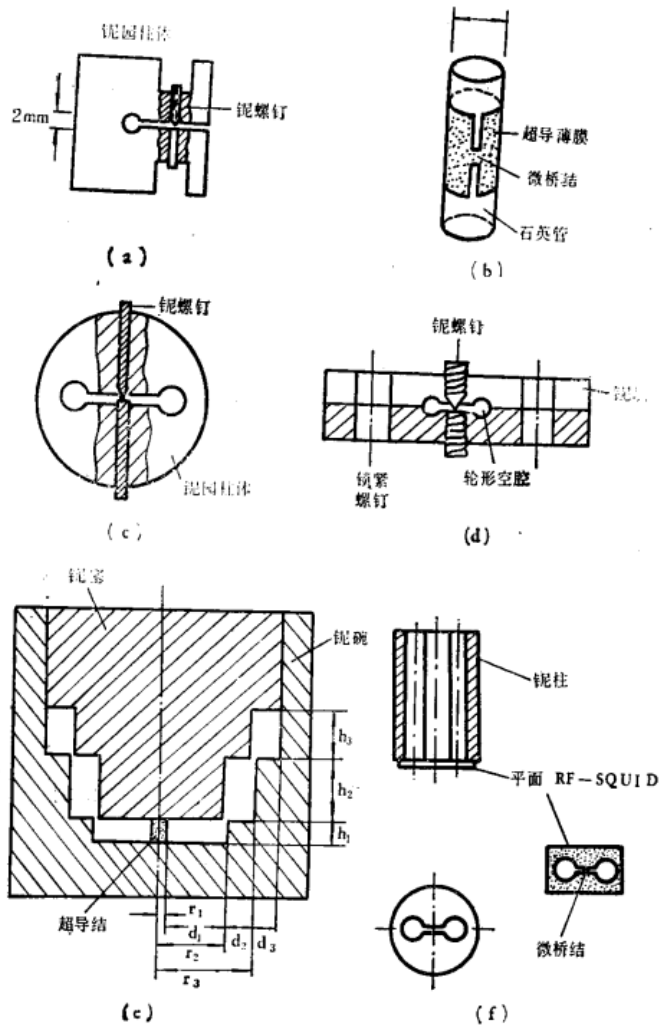


图 3.1　几种射频超导量子干涉器探头的结构草图

图 3.1*b* 所示的是微桥结 RF-SQUID[2,3]。在一根直径约为 2mm、长度约为 20mm 的石英管或兰宝石管上蒸镀一层超导膜，膜厚约 100Å，桥区长宽为微米量级。射频谐振线圈装在管内，输入线圈套在管外。

图 3.1*c* 所示的是图 3.1*a* 的改进形式[1,4,5]。在铌圆柱体上钻两个通孔，其间切一通槽把二孔连通，沿横向旋入铌螺钉，使之形成点接触结。这种结构叫做对称双孔 RF-SQUID，这是一种常用的结构形式。它的磁通灵敏度较单孔的为高。冷热循环性能和单孔的相同。

图 3.1*d* 所示的是轮形空腔 RF-SQUID[6,7]。它有上下两个相同的部分，两部分对起来后形成一个空腔，空腔外侧是环形的，中间部分是圆盘形的，圆盘形空腔和环形空腔内侧相通，点接触结就安装在圆盘形空腔中，输入线圈和射频谐振线圈安放在环形空腔内。这是一种特别有用的结构形式。其优点是：1. 很结实；2. 自身就有屏蔽外磁场的作用；3. 空腔的长度较大，腔的自感系数很小，可以使用与之最佳匹配的大自感的输入线圈。

图 3.1*e* 是一种混合式结构[8]。一个铌塞和一个铌碗套在一起，形成一个具有圆环状空腔的圆柱体。空腔内装有谐振线圈和输入线圈。铌塞下端和铌碗底部内壁间的窄槽内安装一个隧道结或微桥结。隧道结或微桥结两侧的超导薄膜分别与铌柱和铌碗形成超导接触。它完全相当于把图 3.1*d* 中的点接触结换成隧道结或微桥结而成。

图 3.1*f* 所示的也是混合式结构[9]。硅基片上溅射了一层带有双孔的铌膜，双孔间是无铌膜的窄缝，窄缝中央跨接一个微桥结，即基片上的铌膜是一个平面双孔形式的 RF-SQUID。该平面形式的 RF-SQUID 和一个带有通孔的铌圆柱体经互感耦合。铌圆柱体上的通孔截面尺寸跟平面双孔 RF-SQUID 的尺寸相同，刚好重合在一起。这种结构是双孔点接触结 RF-SQUID 的一个变种。

此外，还有一种非常精巧的点接触结 RF-SQUID 即分数匝 RF-SQUID[10,11]，它是在一个点接触结两端并联 12 个或更多的回路而形成的。由于各回路的自感是并联的，故整个环孔的自感很小，从而输出信号变大。与之类同，还有一种在隧道结两端并联 8 个回路的 RF-SQUID[12]。

§3.2 RF-SQUID 环在外磁场中的性质[13,14]

图 3.2 示出 RF-SQUID 环的等效电路。超导结等效为一个理想超导结、结电阻 R、结电容 C 的并联支路，超导环路的电感为 L。假定理想超导结满足正弦式的电流——位相关系，即

$$I_s = I_c \sin\theta \tag{3.1}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{\phi_0} V \tag{3.2}$$

式中各量的意义与前相同。

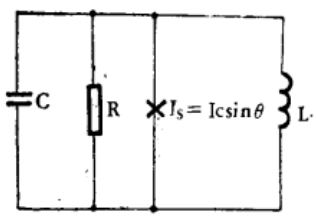


图 3.2 RF-SQUID 环的等效电路

如果超导环路中有电流 I，则这个电流在超导结中分成三个支流，

$$I = I_c \sin\theta + \frac{V}{R} + C\frac{dV}{dt} \tag{3.3}$$

式中右端第一、二、三项分别为理想超导结中的约瑟夫逊电流、结电阻的常导电子隧道电流、

结电容的位移电流。

由式(1.10)，假定式中的 $n=0$，得到 RF-SQUID 环中的全磁通 ϕ 和超导结两端量子位相差 θ 的关系为：

$$\theta = 2\pi\frac{\phi}{\phi_0} \tag{3.4}$$

全磁通 ϕ 为外加磁通 ϕ_e 和环流 I 产生的磁通的代数和，即

$$\phi = \phi_e - LI \tag{3.5}$$

由式(3.1)—(3.5)，利用推导式(2.21)的无量纲量，容易得到外磁场中 RF-SQUID 环满足的方程式为：

$$\ddot{\theta} + G\dot{\theta} + \sin\theta = K(\theta_e - \theta) \tag{3.6}$$

式中

$$\theta_e = \frac{2\pi\phi_e}{\phi_0} \tag{3.7}$$

$$G = \left(\frac{\phi_0}{2\pi I_c R^2 C}\right)^{1/2} = \beta_c^{-1/2} \tag{3.8}$$

$$K = \frac{\phi_0}{2\pi I_c L} \tag{3.9}$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\tau}, \quad \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{d\tau^2} \tag{3.10}$$

$$\tau = \left(\frac{\phi_0 C}{2\pi I_c}\right)^{-1/2} t \tag{3.11}$$

θ_e 和 τ 为无量纲外磁通和时间，G 和 K 是 RF-SQUID 环的特征参量，它们的作用下面将要讨论。

将式(3.6)和(2.21)相比较，即可看出，式(3.6)和复摆的运动方程式相似，只是多了右端第二项即扭力矩项，其他各量的意义同前。θ、$\dot{\theta}$、$\ddot{\theta}$ 相应于角位置、角速度、角加速度，G 相应于阻尼系数，左端第二、三项相应于阻力力矩和重力力矩，右端第一项相应于外加力矩，右端第二项相应于与角位置成正比的扭力矩。

这一节，我们先研究恒定外磁场即外力矩 θ_e 不随时间变化的情况。对于这种情况，$[K(\theta_e-\theta)-\sin\theta]$ 相应于作用在复摆上的保守力，可以用一个势能函数 U 来表示：

$$-\frac{dU}{d\theta} = K(\theta_e - \theta) - \sin\theta \tag{3.12}$$

积分后得到，

$$U = -K\left(\theta_e\theta - \frac{\theta^2}{2}\right) - \cos\theta \tag{3.13}$$

其中取积分常数为 0。可见，U 是 K、θ_e 和 θ 的函数，对于给定的 K 和 θ_e，容易给出 $U-\theta$ 势能曲线。图 3.3 示出 $K=0.05$，$\theta_e=21.13$ 的 $U-\theta$ 曲线。

$U-\theta$ 势能曲线上有一些极值，极值的横坐标 θ 由 $dU/d\theta=0$ 决定，即由

$$K(\theta_e - \theta) - \sin\theta = 0 \tag{3.14}$$

决定，亦即由直线 $y_1[y_1=K(\theta_e-\theta)]$ 和曲线 $y_2[y_2=\sin\theta]$ 的交点决定。它们分别相应于复摆的可能平衡位置，势阱底点位置相应于稳定平衡位置，势垒顶点位置相应于不稳定平衡位

置，稳定平衡位置相应于恒定外磁场中的 RF-SQUID 方程式(3.6)的静态解。

所谓静态解是指：加入 RF-SQUID 环中的外磁场是静磁场即 $\dot{\theta}_e=0$，且加入磁场已很久，起始过程结束后的解。这时，超导结两端没有电压，即 $\ddot{\theta}=\dot{\theta}=0$，于是，式(3.6)成为(3.14)。式(3.14)是 $U-\theta$ 势能曲线上的极值所遵从的方程式。给定 K 值后，便可以给出式(3.14)中的 $\theta_e-\theta$ 关系。

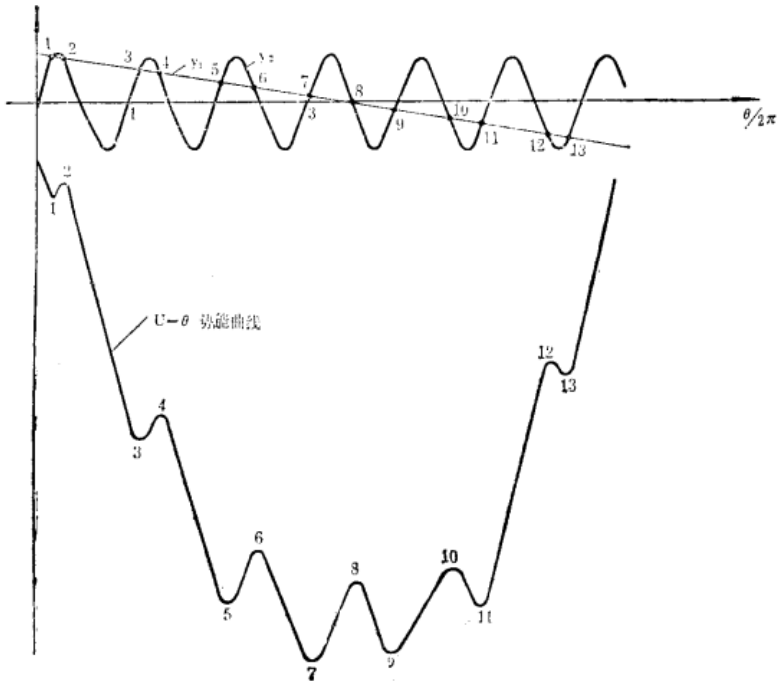


图 3.3 $U-\theta$ 势能曲线

$\theta-\theta_e$ 曲线的形状和 K 的大小有关。由式(3.14)，该曲线的斜率为：

$$\frac{d\theta}{d\theta_e}=\frac{1}{1+\frac{1}{K}\cos\theta} \tag{3.15}$$

$K>1$ 时，$d\theta/d\theta_e>0$，θ 是 θ_e 的单值函数；$K<1$ 时，$d\theta/d\theta_e$ 可正可负，θ 是 θ_e 的多值函数。实用的射频超导量子干涉器均利用后一种情况。下面仅介绍 $K<1$ 的射频超导量子干涉器。

图 3.4 示出 $K<1$ 时的 $\theta-\theta_e$ 曲线和 $I-\theta_e$ 曲线。$I-\theta_e$ 曲线可由 $\theta-\theta_e$ 曲线和式(3.5)得到。$\theta-\theta_e$ 曲线中，斜率为正的区域是稳定区域，斜率为负的区域为不稳定区域。图 3.5示出 G 很大时，θ 随准静态外磁通 θ_e 的变化情况。当 θ_e 从 0 沿正方向缓慢增加时，θ 沿曲线 $0a_0$ 从 0 缓慢地增加到 a_0 点，这是因为 θ_e 的变化所产生的环流力图补偿外磁通 θ_e，但因存在超导结，这个屏蔽并不充分(如果是没有超导结的全超导回路，这个补偿作用将是充分的，θ恒保持在 0 值)，到 a_0 点，θ 不连续地突然跳到 a_0'，这是因为：在这一点，超流 I 刚刚超过 I_c，超导结立刻转变到非零电压状态。a_0 点相应的外磁通 ϕ_{ec} 叫做临界磁通。临界磁通的无量纲量 θ_{ec} 为：

$$\theta_{ec}=\frac{2\pi\phi_{ec}}{\phi_0}$$

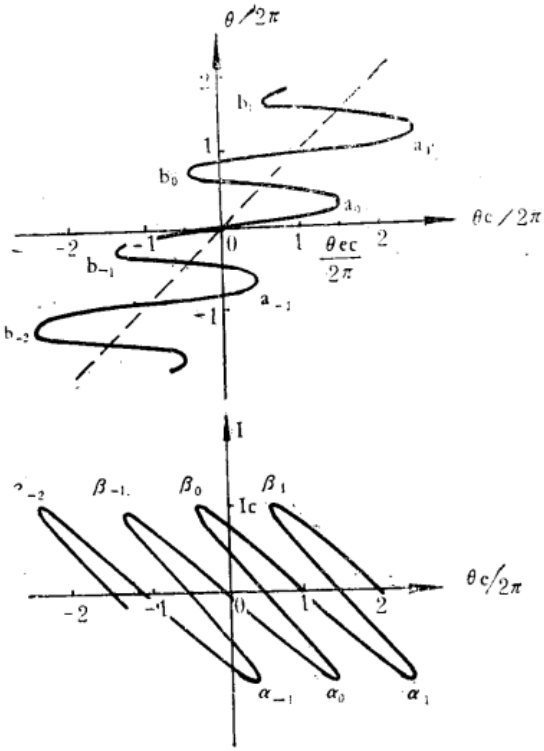


图 3.4 $K<1$ 时的 $\theta-\theta_e$ 曲线和 $I-\theta_e$ 曲线

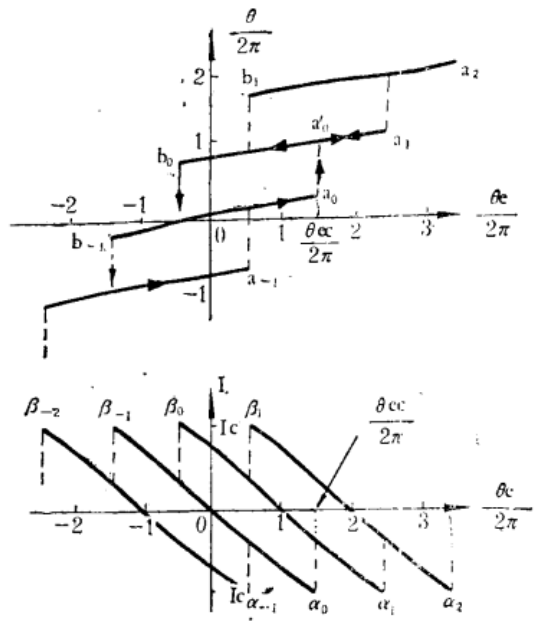


图 3.5 θ 和 I 随准静态外磁通 θ_e 的变化

继续增加 θ_e，θ 沿曲线 b_0a_1，从 a_0' 缓慢增加，到 a_1 点又发生不连续地突然跃迁。继续增加 θ_e，还会在 a_2、a_3、a_n 点跃迁，$n=0,1,2,\cdots\cdots$。我们把上述的跃迁分别叫做 RF-SQUID 从第 0 号量子态跃迁到第 1 号量子态、从第 1 号量子态跃迁到第 2 号量子态、……。假定 θ_e 从刚刚超过 θ_{ec} 的一点沿负方向减小，那么 θ 沿曲线 b_0a_1 变化，θ_e 减小到 a_0' 时，它并不返回 $b_{-1}a_0$ 曲线，即 RF-SQUID 仍处在第 1 号量子态。当 θ_e 减小到 b_0 点时，I 又超过临界电流 I_c，θ 发生不连续突然变化，RF-SQUID 跃迁到第 0 号量子态。同样地，持续减小 θ_e，RF-SQUID 会在 b_{-1}、b_{-2}、……跃迁到第 -1 号、-2 号、……量子态。假定 θ_e 从稍低于 b_{-1}' 的一点沿正方向增加，则 θ 沿曲线 $b_{-2}a_{-1}$ 变化，到 a_{-1} 点时突然从第 -1 号量子态跃迁到第 0 号量子态。

环流 I 随外磁通 θ_e 的变化也是这样，可以从图 3.4和3.5 看出，跃迁点用 α_n 和 β_n 表示。

总之，θ 和 I 随 θ_e 的变化是不可逆的，RF-SQUID 环所处的状态不仅依赖于外界条件，而且还依赖于它所经历的过程，但不管 θ_e 如何变化，θ 和 I 只能在 $b_{n-1}a_n$ 或 $\beta_{n-1}\alpha_n$ 曲线上变化，其中 $n=0$，±1，±2，……，当 θ_e 沿正方向和负方向变化幅度很大时，$\theta-\theta_e$ 曲线是一条闭合曲线，叫做 RF-SQUID 经历一个回滞过程。此闭合曲线叫回滞环线。

现在进行定量研究。

一、参量 K 对 RF-SQUID 量子态跃迁的影响

设 b_{n-1} 和 a_n 点的坐标分别为：$b_{n-1}[\theta_e(b_{n-1})$，$\theta(b_{n-1})]$，$a_n[\theta_e(a_n)$，$\theta(a_n)]$。发生量子态跃迁时，$d\theta/d\theta_e=\infty$。由式(3.15)，这个条件相当于：

$$1+\frac{1}{K}\cos\theta=0$$

解此方程式，可以得到$\theta(b_{n-1})$和$\theta(a_n)$。将求得的$\theta(b_{n-1})$和$\theta(a_n)$代入式(3.14)，可以求得$\theta_e(a_n)$和$\theta_e(b_{n-1})$。计算结果是：

$$\theta_e(a_n) = 2\pi n + \theta_{ec} \tag{3.16}$$

$$\theta(a_n) = 2\pi n + \theta_{ec} - \left(\frac{1}{K^2} - 1\right)^{1/2} \tag{3.17}$$

$$\theta_e(b_{n-1}) = 2\pi n - \theta_{ec} \tag{3.18}$$

$$\theta(b_{n-1}) = 2\pi n - \theta_{ec} + \left(\frac{1}{K^2} - 1\right)^{1/2} \tag{3.19}$$

其中

$$\theta_{ec} = \pi - \cos^{-1}K + \left(\frac{1}{K^2} - 1\right)^{1/2} \tag{3.20}$$

同理，可以得到α_n和β_{n-1}的坐标。它们的横坐标分别为a_n和b_{n-1}的横坐标。纵坐标为：

$$I(\alpha_n) = -I_c\left[1 - \left(\frac{1}{K}\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.21}$$

$$I(\beta_{n-1}) = I_c\left[1 - \left(\frac{1}{K}\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.22}$$

可以看出，曲线$b_{n-1}a_n$的中点纵坐标为$2\pi n$，该点和$\theta(a_n)$、$\theta(b_{n-1})$的差为$(\pi - \cos^{-1}K)$。该值小于π，于是，曲线a_nb_{n-1}上各点纵坐标与$2\pi n$的差不会大于2π。由式(3.4)，相应的ϕ小于ϕ_0，可以用数码n来表示这条曲线。我们将RF-SQUID环中的全磁通ϕ处于这条曲线上的状态叫做第n号量子态的理由就在于此。

还可以看出，θ_e不等于$\theta_e(a_n)$或$\theta_e(b_{n-1})$时$U-\theta$势能曲线上的极值数目比θ_e等于$\theta_e(a_n)$或$\theta_e(b_{n-1})$时$U-\theta$势能曲线上的极值数目多两个，其中一个是极小值，一个是极大值。这是因为在前一种情况，它们是极大值和极小值，而在后一情况，它们合并成拐点。这样以来，静态解的数目即$U-\theta$势能曲线上的极值数目和K、θ_e有关。为了使RF-SQUID从序号为n的量子态跃迁到$(n+1)$的量子态，$U-\theta$曲线上对于任一θ_e应当至少有三个极值，其中两个是极小值，另一个是极大值，于是，K的取值有个上限。

现在推导K的上限，图3.6示出曲线$y_2=\sin\theta$以及跟y_2有两个切点的直线y_{10}，y_{11}，……y_{1n}，……$(n=0,1,\cdots\cdots)$。这些直线的斜率的绝对值为k_0，k_1，……k_n，……，$(n=0,$

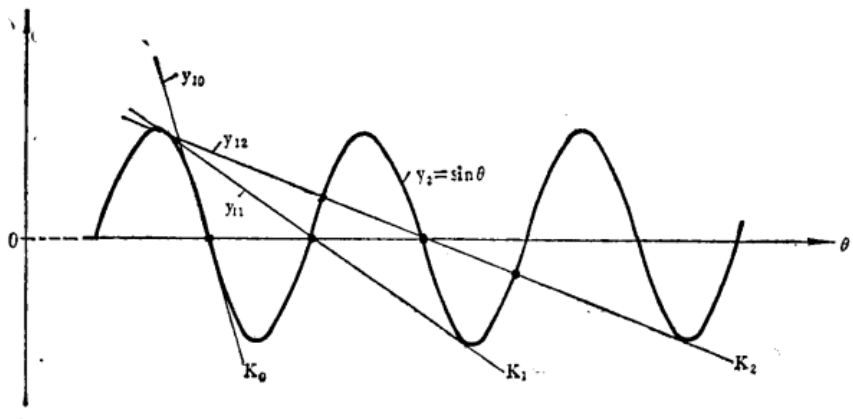


图3.6　和正弦曲线有两个切点的直线

1，……)、k_n 由下式决定：

$$n\pi+\cos^{-1}k_n-\left(\frac{1}{k_n^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}=0,\quad (n=0,1,2,\cdots\cdots) \tag{3.23}$$

数值计算指出，$k_0=0.83$，$k_1=0.237$，$k_2=0.135$，$k_3=0.097$。斜率大于 k_0 的直线与 y_2 只有 1 个交点。斜率为 k_1 的直线和 y_2 有两个切点和 1 个交点或 3 个交点。斜率小于 k_1 的直线和 y_2 有 1 个切点和 3 个交点，或 5 个交点，或更多的奇数个交点。斜率在 k_0 和 k_1 间的直线和 y_2 的交点数目可以是 3 个，也可能是 1 个，视 θ_e 的大小而定，不可能保证对于任一 θ_e 均有 3 个交点。于是，按回滞模式工作的 RF-SQUID 的 K 应当满足下式：

$$K<k_1=0.237 \tag{3.24}$$

以便它能够从一个亚稳态跃迁到另一个亚稳态。

但必须指出，K 值也不宜取得太小，因为交点太多即亚稳态太多，存在发生多磁通量子跃迁的可能性。进而，如果 G 较小，则必定发生多磁通量子跃迁。反之，如果 G 较大，即使 K 较小，也不会发生多磁通量子跃迁。现在就来分析这个问题。

二、参量 G 对 RF-SQUID 量子态跃迁的影响

G 的影响可由一些典型情况的 $\dot\theta-\tau$ 曲线看出，如图 3.7～3.9所示。图 3.7 示出 $K=0.05$，

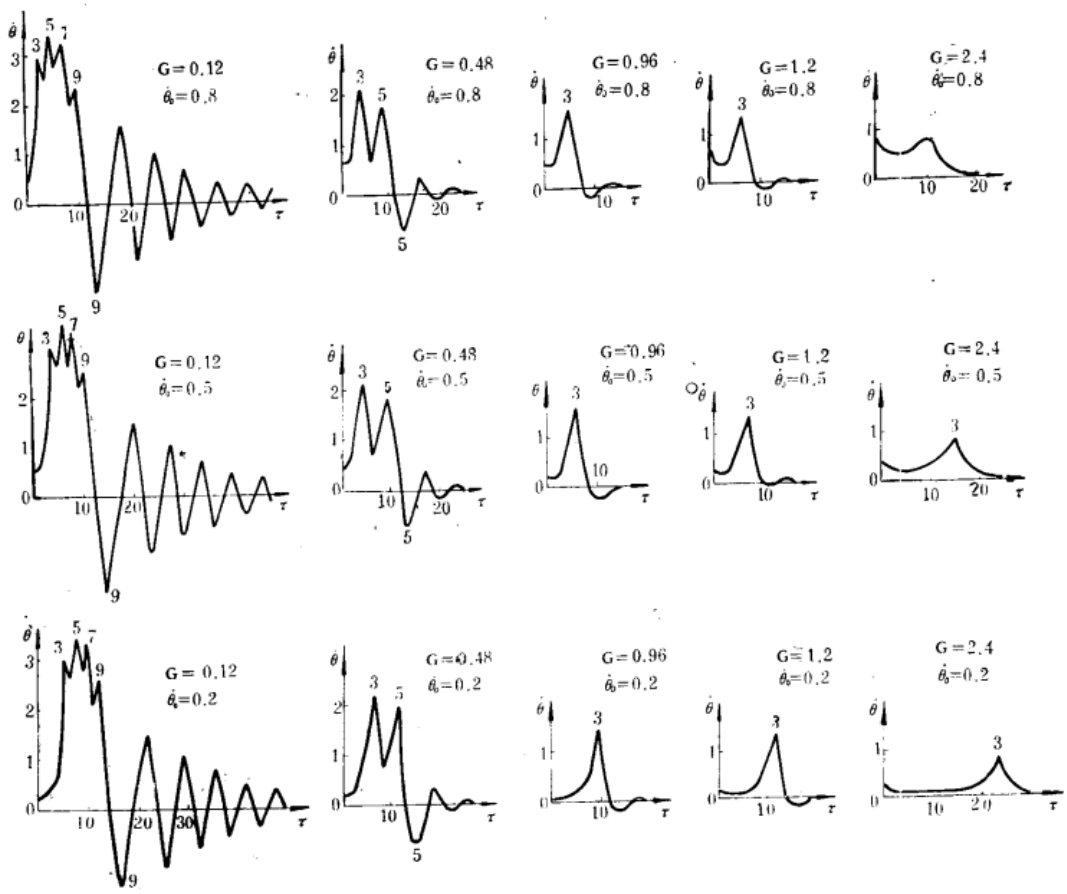


图 3.7　$K=0.05$；G 为参变量；$\theta_e=21.13$；$\dot\theta_0=0.2,0.5,0.8$；　$\theta_0=1.86$ 的 $\dot\theta-\tau$ 曲线

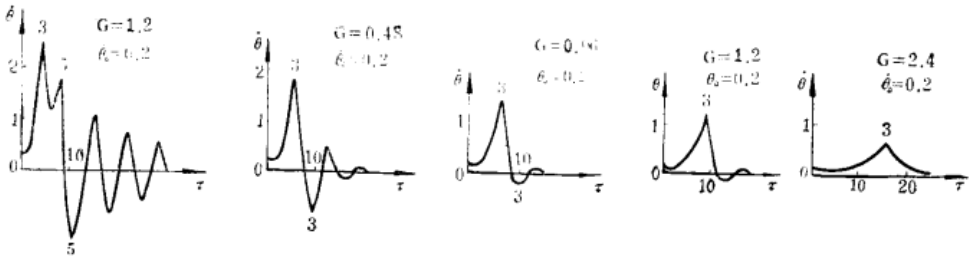


图 3.8　$K=0.12$,G 为参变量，$\theta_e=8.86$，$\dot{\theta}_0=0.2$，$\theta_0=2.21$ 的 $\dot{\theta}-\tau$ 曲线

G 为参变量，$\theta_e=21.13$，$\dot{\theta}_0=0.2$、0.5、0.8，$\theta_0=1.86$ 的 $\dot{\theta}-\tau$ 曲线，$K=0.05$ 和 $\theta_e=21.13$ 的 $U-\theta$ 曲线上有 7 个势阱和 6 个势垒，分别相应于 $n=0\sim6$ 的量子态，$\theta_0=1.86$ 稍小于能量最高的第 2 号势垒顶点的 θ 坐标。$\dot{\theta}_0=0.2$，0.5，0.8 相应于较小的扰动。图 3.8 示出 $K=0.12$，G 为参变量，$\theta_e=8.86$，$\dot{\theta}_0=0.2$，$\theta_0=2.21$ 的 $\dot{\theta}-\tau$ 曲线。$K=0.12$ 和 $\theta_e=8.86$ 的 $U-\theta$ 曲线上有 3 个势阱和 2 个势垒，分别相应于 $n=0\sim2$ 的量子态，$\theta_0=2.21$ 稍小于能量最高的第 2 号势垒顶点的 θ 坐标。图 3.9 示出 $K=0.05$，G 为参变量，$\theta_e=42.26$，$\dot{\theta}_0=\theta_0=0$ 的 $\dot{\theta}-\tau$ 曲线。$K=0.05$ 的 $\theta-\theta_e$ 静态曲线和 $\theta_e=42.26$ 的垂直线的交点属于 $n=4\sim10$ 的量子态，$n=4$ 的态是能量最高的亚稳态，$\dot{\theta}_0=\theta_0=0$ 表示从 $n=0$ 的态开始运动。由复摆模型及这些曲线可以看出 G 在量子态跃迁中的作用。

1. G 约等于或大于 1 时，RF-SQUID 从能量最高的势垒顶点附近出发，跃迁到与该势垒相邻的势阱，跃迁前后的量子态序号 n 相差 1，即为单磁通量子跃迁。$G=0.96$ 或 1.2 时，RF-SQUID 可以越过势阱底点，围绕该底点作衰减振荡，并停止在该点。$G=1.2$ 时负向过冲较小，衰减较快。$G=2.4$ 时，结电压达到一个很小的极大值后，单向趋于该势阱底点，不作振荡。$G>2.4$ 时，由于阻尼更大，结电压脉冲幅度更小，RF-SQUID 将更加缓慢地单向趋于该势阱底点。

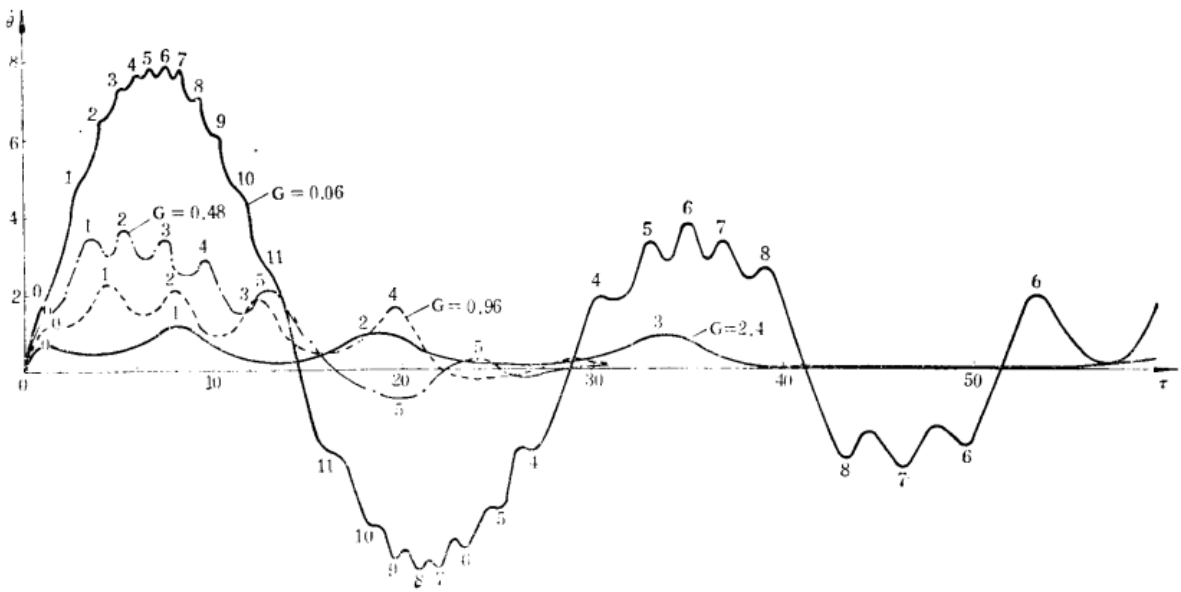


图 3.9　$K=0.05$，G 为参变量，$\theta_e=42.26$，$\dot{\theta}_0=\theta_0=0$ 的 $\dot{\theta}-\tau$ 曲线

另外，由图3.9，$G\geqslant 0.96$时，RF—SQUID从$n=0$的态跃迁到$n=4$的态。$n=0\sim 3$的态不是亚稳态，它相当于从$n=3$的态以更大的$\dot{\theta}_0$出发的跃迁，可见，$G\geqslant 0.96$时，只要$\dot{\theta}_0$不是很大而θ_0很接近一亚稳态的θ坐标，它总是停在与θ_0最接近的亚稳态。

所以，$G\geqslant 1.2$是过阻尼条件，$G\approx 1.2$时便可以保证单磁通量子跃迁。

2．G约小于0.1，$K\ll 1$时，RF—SQUID从能量最高的势垒顶点附近出发，可以相继地越过几个势阱和势垒，甚至可以越过能量最低的势阱，进入U-θ曲线另一侧能量较高的势垒区，再反向运动，越过数目相同或较少的势阱和势垒再反向，……如此反复若干次，最后围绕某一亚稳态势阱底点作衰减运动，经历很长的时间后才停止在该势阱底点。始末状态的序号差等于2或大于2，也可能等于1或0，即它是多磁通量子跃迁，且存在着磁通多次交替进入RF—SQUID环孔并从环孔中退出的问题，跃迁情况较复杂。

由G的阻尼作用容易看到，对于给定的K、θ_e、$\dot{\theta}_0$、θ_0，而G更小时，$\dot{\theta}$-τ曲线上含有小峰的正峰或负峰数目更多，正峰或负峰上的小峰数目也更多，亦即G愈小，磁通多次进入退出问题及多磁通量子跃迁问题愈严重。

3．G约在0.1和1.2之间时，由于G值介于上述两种情况之间，故量子态跃迁情况也介于二者之间，对于同样的K、θ_e、$\dot{\theta}_0$、θ_0，G从较小的值增加时，始末量子态的序号差较小，直到序号差为1，成为单磁通量子跃迁，同时，磁通多次进入退出现象也随着G的增加而逐渐减少，直到不发生这种现象。

需要指出的是，RF—SQUID的量子态跃迁，除了决定于G和K外，还跟θ_e、$\dot{\theta}_0$、θ_0有关。对于给定的G和K，θ_e变化时，U-θ曲线的形状、亚稳态的位置和序号跟着变化，亚稳态的数目也可能差一个，故对于给定的G、K、$\dot{\theta}_0$、θ_0，$\dot{\theta}_0>0$，θ_0小于第1号势阱底点的坐标时，θ_e愈大，$\dot{\theta}$-τ曲线上含有小峰的正峰或负峰数目愈多。以各个正峰或负峰出现时间前后为序，各峰上的小峰数目逐渐减少，直到不含小峰，$\dot{\theta}$随τ的增加作单峰衰减振荡。对于给定的G、K、θ_e而$\dot{\theta}_0$愈大和θ_0愈小时，也可以得到同样的结论。例如图3.9中，RF—SQUID从$n=0$的态出发，跃迁到$n=11$的量子态（$n=0\sim 3$，11的态不是亚稳态），有$11\phi_0$进入环孔，再排出$6\phi_0$进入$n=4$的态，再进入$4\phi_0$跃迁到$n=8$的态，退出$3\phi_0$到$n=5$的态，最后进入$2\phi_0$跃迁到$n=7$的态，围绕第7号势阱底点作衰减振荡。

三、参量G和K对RF—SQUID量子态跃迁时间的影响。

G约大于1.2时，RF—SQUID在较小扰动下离开势垒顶点进入相邻势阱底点的单磁通跃迁过程是由二个阶段组成的，一个是$\dot{\theta}$随τ的变化而缓慢增加的慢升阶段，一个是迅猛变化的跃迁阶段。慢升时间和跃迁时间取决于G、K、$\dot{\theta}_0$，可由这三个量的作用加以说明。对于给定的G和K，$\dot{\theta}_0$愈大即初速度大，显然慢升时间愈短。对于给定的K和$\dot{\theta}_0$，G愈小，由于阻尼作用减小，慢升时间愈短。对于给定的G和$\dot{\theta}_0$，K愈大，由于势阱更加陡峭，慢升时间也愈短。同理，G愈小、K愈大，$\dot{\theta}_0$愈大，则跃迁时间愈短。数值计算结果指出，G的影响最大，K的影响次之，较小的$\dot{\theta}_0$的影响不大。G较小、K和$\dot{\theta}_0$较大时，慢升时间比跃迁时间小得多，如图3.7。

G小于0.1时，RF—SQUID具有多磁通量子跃迁及磁通多次进入退出问题。含有小峰

的正峰或负峰宽度即围绕 U-θ 曲线最低点沿一个方向摆动一次的时间 τ_n、正峰或负峰上的二个相邻小峰间的时间即从一个量子态跃迁到相邻量子态的时间 τ_1、围绕某一亚稳态势阱底点振荡一次的时间即振荡周期 τ_0 均和 K、G、θ_e、$\dot{\theta}_0$、θ_0 有关，并且是随时间变化的，它们间的关系很复杂，但从 U-θ 曲线并利用复摆模型，容易得出定性结论。例如，对于给定的 G、K、θ_e、$\dot{\theta}_0$、θ_0，$\dot{\theta}_0>0$，θ_0 小于第 1 号势阱的 θ 坐标时，任一正峰或负峰的宽度 τ_n 比它前面的正峰或负峰宽度要小，这是因为围绕 U-θ 曲线最低点的振荡幅度愈来愈小，越过的势阱势垒数目愈来愈少的缘故。任一个正峰或负峰上的各个相邻小峰间的时间是不相同的，这是由于各个势阱势垒的形状不同。进入各个势阱区的 $\dot{\theta}$ 不同而造成的，任何两个相邻小峰间的时间 τ_1 比它们前面的正峰或负峰上同样序号的两个小峰间的时间要长，这是因为 $\dot{\theta}$ 愈来愈小之故。系统进入某一亚稳态势阱后的振荡周期 τ_0 愈来愈小，最后趋于一常数，这是因为刚进入某一亚稳态势阱区的 $\dot{\theta}$ 较大，振幅较大，而势阱形状复杂，不可能是等周期的振动，只有到了振幅变小后，阻尼又很小，才可以成为近似的谐振动。

K、θ_e、$\dot{\theta}_0$、θ_0 相同，$\dot{\theta}_0>0$，θ_0 小于第 1 号势阱底点的 θ 坐标，而 G 不相同时，τ_n、τ_1、τ_0 也不同。G 愈大，相同序号的二个量子态间的跃迁时间 τ_1 愈大，但同一序号的正峰或负峰宽度却可大可小，前者是由于阻尼变大，后者还由于 G 大时，越过的势阱势垒数目减小了。若 G 不相同的 RF—SQUID 最后围绕同一亚稳态势阱底点振荡，则 G 愈大，振荡周期的稳定值愈大；若围绕不同的亚稳态势阱底点振荡，则振荡周期的稳定值和 G 不一定成单调函数关系。G 增大到约 0.1～1.2 时，RF—SQUID 围绕某一亚稳态势阱底点振荡几次便单方向地趋向该底点，即振荡周期的稳定值是无限大。G 更大时，仅振荡一次或不振荡就单方向地趋近该底点。

G、θ_e、$\dot{\theta}_0$、θ_0 相同，$\dot{\theta}_0>0$，θ_0 小于第 1 号势阱底点的 θ 坐标，而 K 不相同时，由于 K 较大时，亚稳态数目减少，且势垒变得陡峭，故 τ_n、τ_1 和 τ_0 均随 K 的加大而减小。

G、K 相同而 θ_e 或初始条件 $\dot{\theta}_0$ 和 θ_0 不同时，τ_n、τ_1、τ_0 也不同，可仿照上面的方法进行定性估计。

由以上分析和数值计算可以得到以下结论：

1. 超导结的临界电流和 RF—SQUID 环电感即 K 的大小决定 RF—SQUID 的工作模式。$K<0.237$ 时为回滞模式。这个结论比某些文献中以 $K>1$ 或 $K<1$ 为非回滞模式或回滞模式的分界线来说，更为严格。

2. 按回滞模式工作的 RF—SQUID 是否发生多磁通量子跃迁，主要由 G 和 K 两个量决定，$K\ll0.237$ 时，RF—SQUID 本身有很多个亚稳态，且势阱曲线较平坦从而提供了发生多磁通量子跃迁的条件，进而，如果 G 约小于 1.2，便必然出现多磁通量子跃迁，反之，如果 G 约大于 1.2，即使 $K\ll0.237$ 也不会发生多磁通量子跃迁，这时 RF—SQUID 从起初的能量较高的亚稳态跃迁到相邻的亚稳态，因而是单磁通量子跃迁。为防止多磁通量子跃迁，要求 K 稍小于 0.237 而不宜过小，同时要求 G 在 1.2 附近，最好 $G\fallingdotseq0.9$～1.2 而不应过大或过小。因为 G 小于该值时，存在着磁通反复进入退出 RF—SQUID 环孔问题以及衰减缓慢问题，G 太大和 K 太小时，跃迁时间较长，有损 RF—SQUID 的动态特性。

另外，θ_e、$\dot{\theta}_0$、θ_0 的大小也影响 RF—SQUID 的跃迁。

四、$\cos\theta$ 项对 RF—SQUID 量子态跃迁的影响[15]

考虑超导结的约瑟夫逊电流和常导电子隧道电流交叉项时，恒定外磁场中的 RF—SQUID 方程式为：

$$\ddot{\theta}+G(1+\epsilon\cos\theta)\dot{\theta}=K(\theta_e-\theta)-\sin\theta \tag{3.25}$$

式中 ϵ 为[illegible]系数，其他各量的意义同前，我们已经研究过式(3.25)在 $\epsilon=0$ 时的数值解。若 $\epsilon\neq 0$，则 $G(1+\epsilon\cos\theta)$ 相当于和 θ 有关的变阻尼系数。式(3.25)的右端仍然相当于作用在复摆上的保守力，可以用一个与前面相同的势能函数来表示。势能曲线的形状、极值的数目和位置仍由 K 和 θ_e 决定，而与 ϵ 无关，故 $|\epsilon|\leqslant 1$ 时，ϵ 的大小不会改变稳定量子态的数目和位置，它只影响多磁通量子跃迁、磁通量子反复进入退出、进入某一亚稳态势阱的衰减及两个量子态间的跃迁时间，其影响程度和 ϵ 的大小有关。

$|\epsilon|\ll 1$ 时，$|\epsilon\cos\theta|\ll 1$，式(3.25)可以近似成式(3.6)，故不论 G 的大小，ϵ 的影响均可忽略，$\dot{\theta}-\tau$ 曲线、$\theta-\tau$ 曲线与 $\epsilon=0$ 时的曲线相似。

ϵ 接近 -1 时，由于 θ 在 $2\pi n$ 到 $2\pi(n+1/2)$ 的范围内，阻尼系数变化很大，它的影响较大，设 RF—SQUID 在 U-θ 势能曲线第 2 号势垒顶点，受到一个很小的正向扰动开始运动。$\epsilon=0$ 时，RF—SQUID 进入某一个势阱，围绕该势阱底点作衰减振荡，$\epsilon=-1$ 时，由于阻尼系数在第 1、4 象限变小，在第 2、3 象限变大，考虑到势阱在第 1、4 象限，RF--SQUID 可能越过这个势阱及相邻势垒，落入序号更高的势阱或者从序号更高的势垒返回，落入序号更小的势阱。例如，对于图 3.10 所示的 $K=0.05$，$\theta_e=21.13$，$\theta_0=2.21$，$\dot{\theta}_0=0.2$ 情况，$G=0.96$，$\epsilon=0$ 时，RF—SQUID 从第 2 号势垒出发落入第 3 号势阱，围绕该势阱底点作衰减振荡，而 $\epsilon=-1$ 时，则围绕第 5 号势阱振荡；$G=0.48$，$\epsilon=0$ 时，RF—SQUID 从第 2 号势垒顶点出发落入第 5 号势阱，围绕该势阱底点作衰减振荡；而 $G=0.48$，$\epsilon=-1$ 时，RF—SQUID 从第 2 号势垒出发落入第 7 号势阱；$G=-0.12$；$\epsilon=-0.5$、-0.75、-1 时，RF—SQUID 进入第 9 号势阱后，再排出一个磁通量子进入第 7 号势阱围绕第 7 号势阱底点作衰减振荡。可见，$\epsilon<0$ 特别是当 $\epsilon\to -1$ 时，会出现附加的多磁通量子跃迁问题，磁通量子反复进入、退出问题也变得严重起来。不过当 $G\geqslant 1$ 时，这种附加影响是不严重的。

由图中曲线还可以看出 $\epsilon<0$ 时，ϵ 对起始过程、振荡幅度、衰减情况也有一定的影响，$G=1.2$ 时，ϵ 愈负，则起始过程愈长、电压脉冲幅度愈大，且衰减愈慢。

$\epsilon>0$ 时，由于阻尼系数在第 1、4 象限变大，刚好与 $\epsilon<0$ 时相反。因此，当 ϵ 较大，特别当 ϵ 接近 1 时，与 $\epsilon=0$ 时相比，多磁通量子跃迁及磁通量子反复进入、退出问题变得更加缓和，例如 $K=0.05$，$\theta_e=21.13$，$\theta_0=2.21$，$\dot{\theta}_0=0.2$，$G=0.48$ 时，若 $\epsilon=0$，则 RF—SQUID 落入第 5 号势阱。若 $\epsilon=1$ 时，则落入第 3 号势阱。

另外，ϵ 变大，则起始过程变短，电压脉冲幅度减小，衰减变快。

五、RF—SQUID 环孔中的外磁通是时间的线性函数或正弦函数时，它的动态特性[16]

1. 外磁通 θ_e 是时间的线性函数时，式(3.25)的解

设式(3.25)中的 θ_e 为

$$\theta_e=s\tau$$

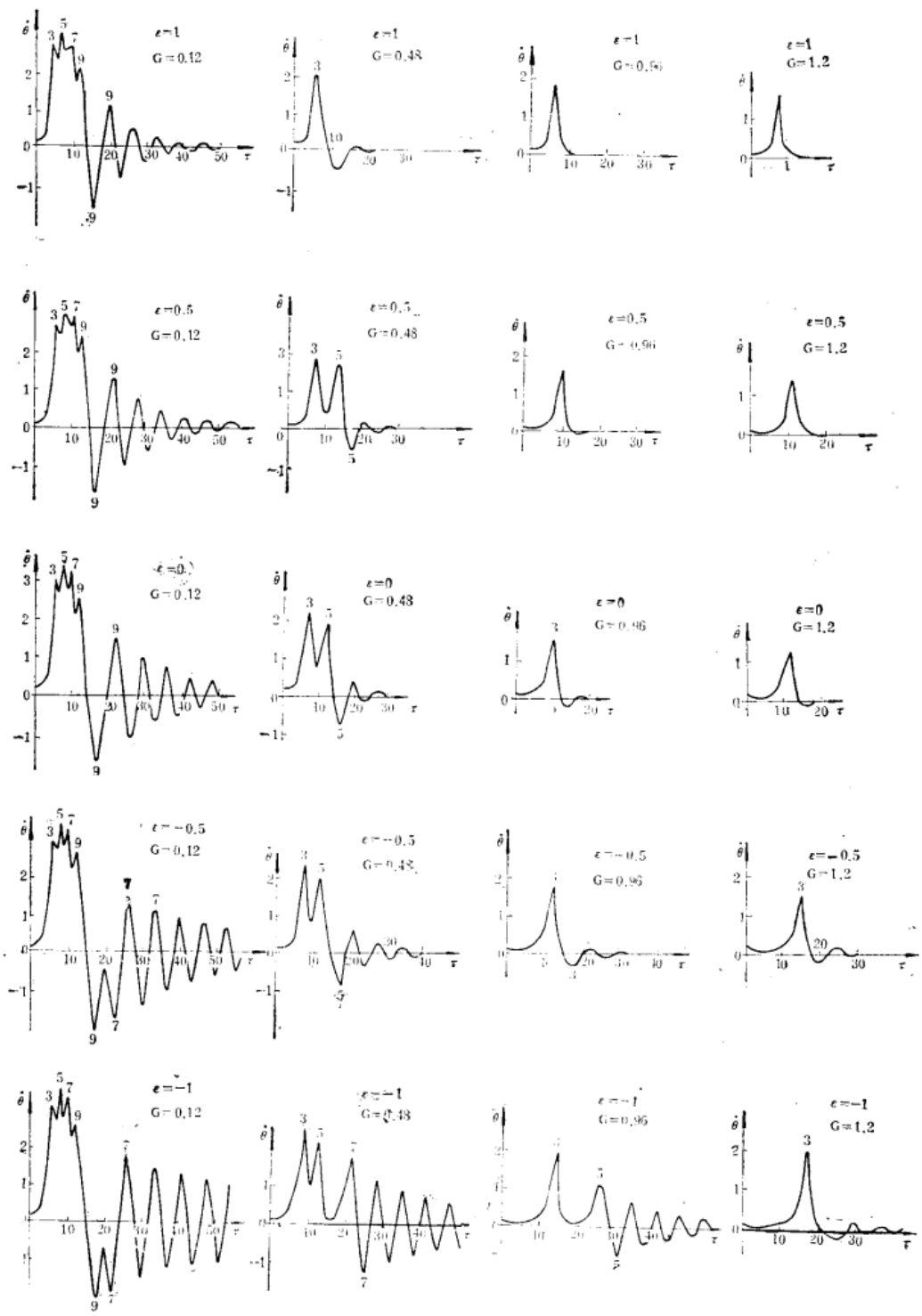


图 3.10　ϵ 对 $\dot{\theta}$-τ 曲线的影响

s 为注入 RF—SQUID 环孔中的外磁通对时间的变化率，s 为常数。

式(3.25)的解显然取决于 K、G、ϵ、s 的大小以及 $\dot{\theta}_0$ 和 θ_0 的大小。下面给出一些典型情况的数值计算结果，如图 3.11～3.14 所示。由这些曲线可以得到以下结论。

(1) θ–τ 曲线是阶梯状曲线，该阶梯曲线的倾斜度等于 s。可见，θ–τ 关系中含有时间 τ 的线性项。每个台阶表示 RF—SQUID 的量子态。$\dot{\theta}$–τ 曲线是振荡曲线，起始过程结束后，便开始周期性的稳定振荡。由 θ–τ 和 $\dot{\theta}$–τ 曲线可以断定 RF—SQUID 的量子态跃迁情况，图中示出单、双、三磁通量子跃迁。

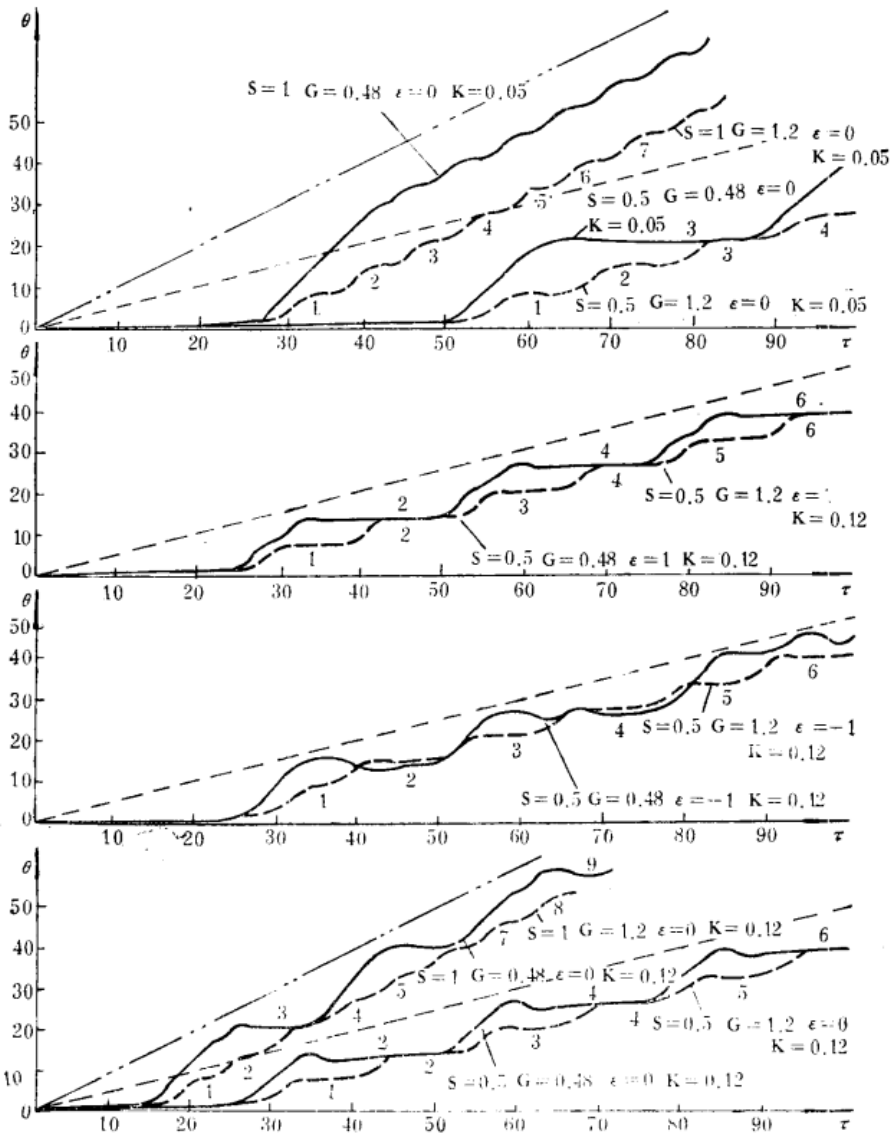


图 3.11 $K=0.12,\ 0.05$；$G=0.48,\ 1.2$；$s=0.5,\ 1$；$\epsilon=-1,\ 0,\ 1$ 时 θ–τ 曲线

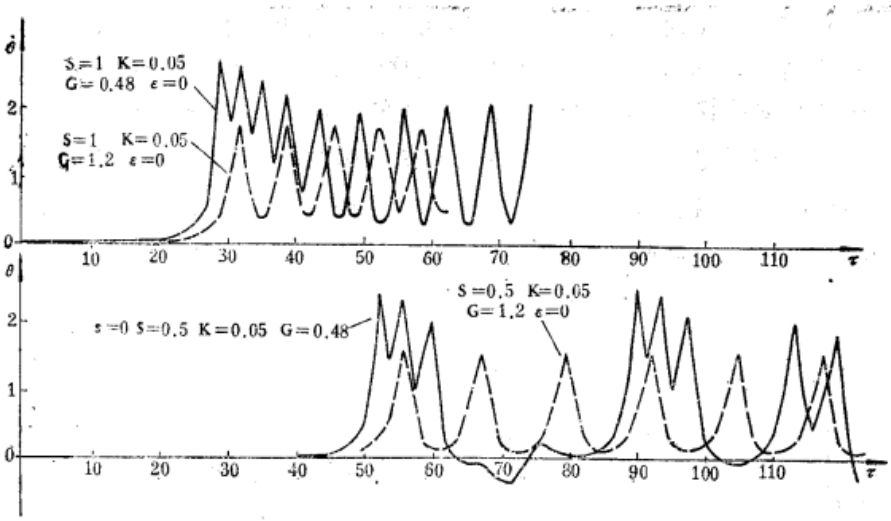


图 3.12. $K=0.05$；$G=0.48$，1.2；$s=0.5$，1；$\bar{\epsilon}=0$ 时的 $\dot{\theta}$-τ 曲线

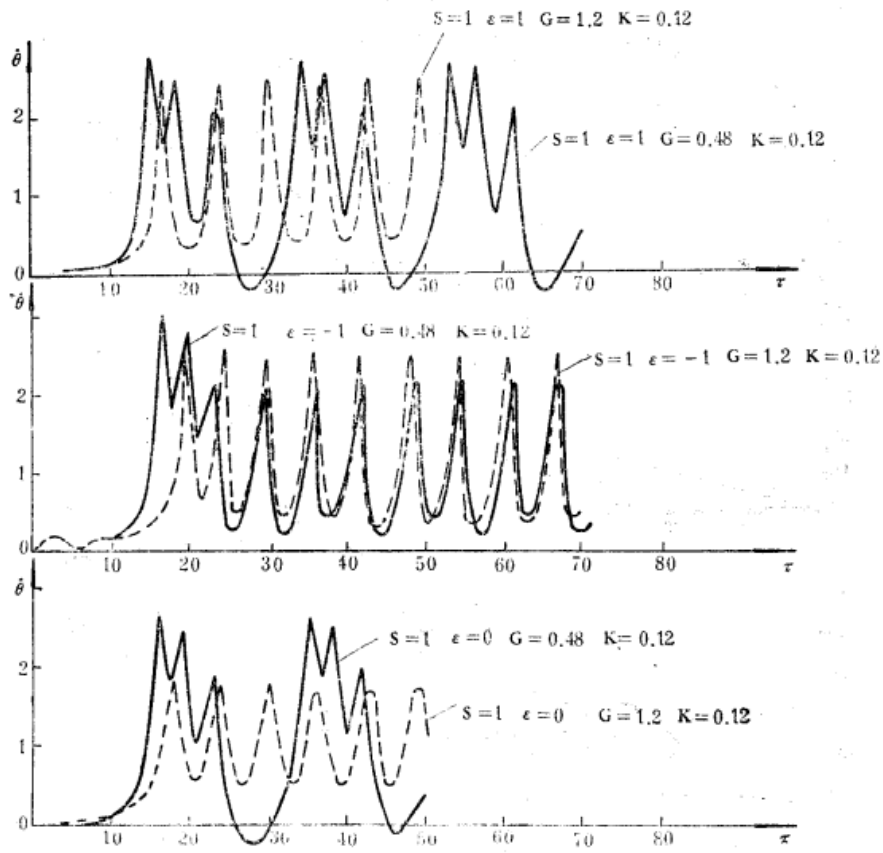


图 3.13 $K=0.12$；$G=0.48$，1.2；$s=1$；$\bar{\epsilon}=-1$，0，1时的 $\dot{\theta}$-τ 曲线

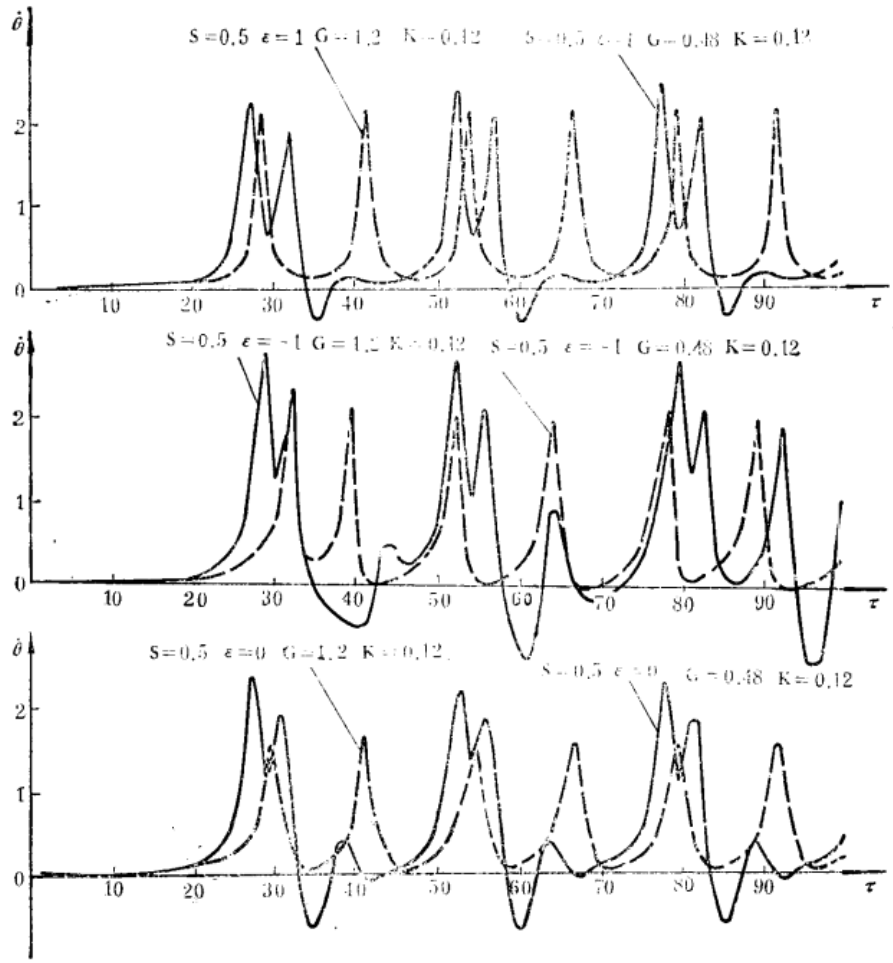


图 3.14　$K=0.12$；$G=0.48$，1.2；$s=0.5$；$\epsilon=-1$，0，1时的 $\dot{\theta}$-τ 曲线

(2) $s=0.5$ 时，$\dot{\theta}$-τ 曲线上交替出现 $\dot{\theta}\approx 0$ 的区段和量子态跃迁区段。量子态跃迁是阵发性的单或多磁通量子跃迁。$s\lesssim 0.5$ 时，一个稳定振荡周期中的大部分时间属于 $\dot{\theta}\approx 0$ 的区段，故 $s\lesssim 0.5$ 的磁通可以认为是准静态磁通。$s=1$ 时，一个稳定振荡周期中的大部分时间属于跃迁区段，故 $s\geqslant 1$ 的磁通不能当作准静态磁通。

(3) $G\gtrsim 1.2$，$s<0.5$ 时，RF—SQUID 为单磁通量子跃迁。$G\lesssim 0.48$ 时，为多磁通量子跃迁。K 减小、s 增大或 ϵ 接近 -1 时，多磁通量子跃迁现象加剧。

(4) ϵ 从 -1 逐渐增加到 1 时，$\dot{\theta}$-τ 曲线上第一次量子态跃迁前 $\dot{\theta}$ 的慢升段时间逐渐减小，振荡电压幅度以 $\epsilon=\pm 1$ 时最大，ϵ 对振荡周期的影响较小。

(5) 单磁通量子跃迁时间或多磁通量子跃迁的一个磁通量子平均跃迁时间不是严格确定的。用 $\dot{\theta}$-τ 曲线的正峰半宽度的二倍表示一个磁通量子的平均跃迁时间 τ_1，则对于所讨论的 G、K、s、ϵ 值范围，τ_1 约为 8～16。

由近似电路分析计算可以得到，单磁通量子跃迁时间约为 L/R 的量级，用无量纲量表示 L/R，则

$$\tau_1 \approx \frac{G}{K}$$

对于所讨论的 G、K 值，$G/K=10\sim24$，与上述计算结果一致。

2．外磁通 θ_e 是时间的正弦函数时，式(3.25)的解

设式(3.25)中的 θ_e 为：

$$\theta_e=\theta_{e0}\sin\frac{2\pi\tau}{\tau_e} \tag{3.26}$$

式中 θ_{e0} 和 τ_e 为 RF—SQUID 环孔中交连的正弦磁通的振幅和周期，均为无量纲量。该正弦磁通对时间的变化率为：

$$\dot{\theta}_e=\frac{2\pi\theta_{e0}}{\tau_e}\cos\frac{2\pi}{\tau_e}$$

$|\dot{\theta}_e|$ 在 0 和 $2\pi\theta_{e0}/\tau_e$ 之间变化。

由线性磁通的讨论可知，为使整个正弦磁通周期内均为静态解，该正弦磁通的振幅和周期要满足条件：

$$\frac{2\pi\theta_{e0}}{\tau_e}\lesssim0.5 \tag{3.27}$$

图 3.15 示出 $\tau_e=300$，$\theta_{e0}=7.5\pi$，$\epsilon=0$，$K=0.12$，$G=0.48$ 和 1.2，$\dot{\theta}_0=\theta_0=0$ 时式(3.25)的数值解。可以看出，在正弦磁通对时间的变化率最大和较大的区段($\tau=150$，300，

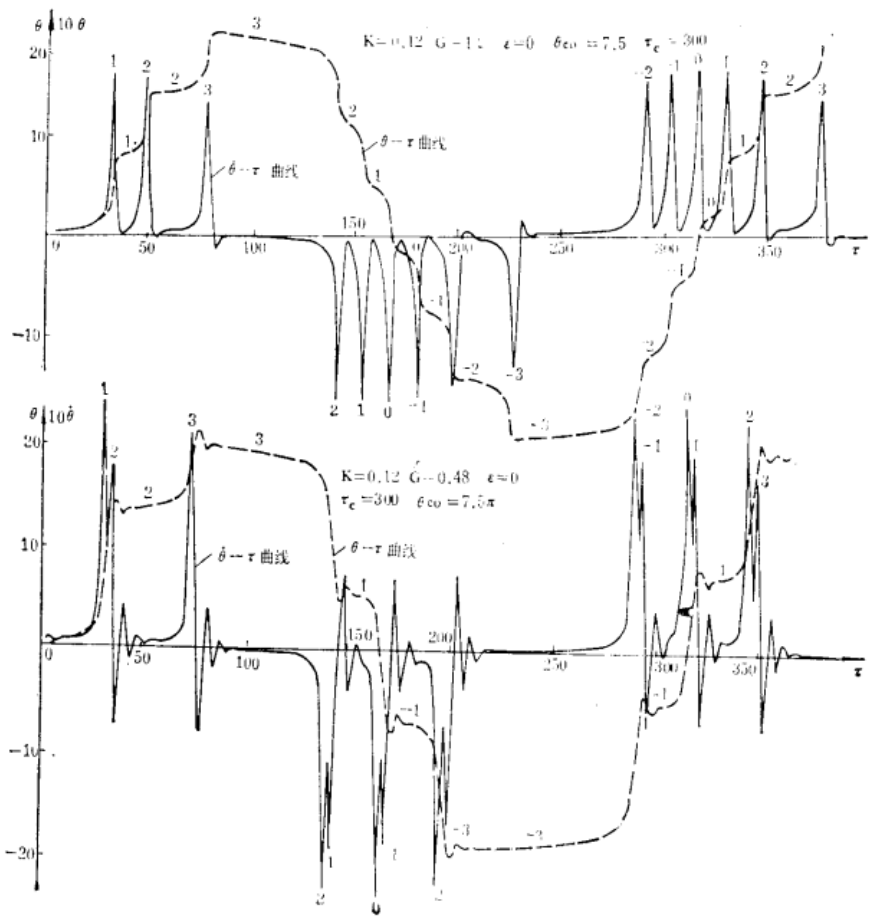


图 3.15 $\tau_e=300$；$\theta_{e0}=7.5\pi$；$\epsilon=0$；$K=0.12$；$G=0.48$、1.2；$\dot{\theta}_0=\theta_0=0$ 时的 $\dot{\theta}-\tau$ 和 $\theta-\tau$ 曲线

450，…的左右），发生准静态量子态跃迁，其他区段内不发生量子态跃迁。据此可知，$2\pi\theta_{e0}/\tau_e$ 愈小，发生量子态跃迁的区段和正弦磁通周期之比愈小，非跃迁区段所占比例愈大。反之，$2\pi\theta_{e0}/\tau_e$ 很大时，整个正弦磁通周期内的各个区段均变成跃迁区。

为发生量子态跃迁，θ_{e0}显然要大于临界磁通 θ_{ec}，θ_{ec} 的大小和 K 有关[见式(3.20)]。

将式(3.27)中的 τ_e 换成有量纲的圆频率 ω，则该式成为：

$$\omega\theta_{e0}<\frac{RG}{2KL} \tag{3.28}$$

对于典型的 K 和 G 值，式(3.28)成为：

$$\omega<R/L \tag{3.29}$$

即 RF—SQUID 环孔中的外磁通频率有一个上限。

§3.3 I_{rf}-V_{rf} 特性和 V_{rf}-ϕ_e 特性

一、测量结果和理论分析

RF—SQUID 作为磁通检测器使用时，RF—SQUID 环与 LC 并联谐振电路中的线圈相耦合，如图 3.16。L_T、C_T 和 R_T 分别为并联谐振电路的电感、电容和等效负载电阻，其谐振频率 f 为：

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{L_TC_T}}$$

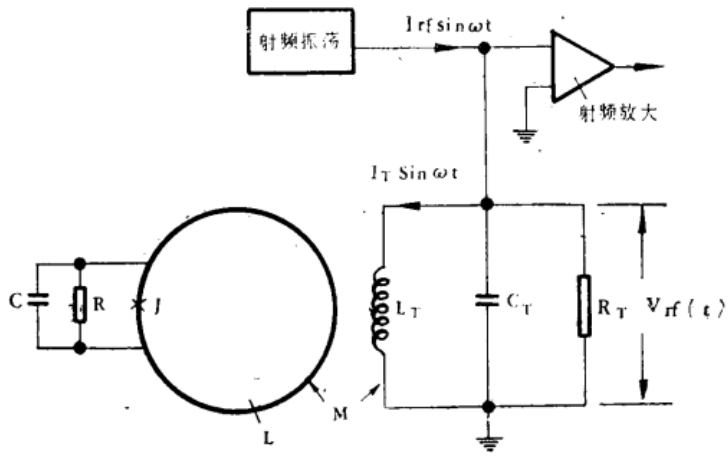


图 3.16　RF—SQUID 的耦合电路

通常 f 为几十兆赫，谐振电路是用射频电流源激励的，射频电流的频率和谐振频率相等，射频电流为 $I_{rf}\sin\omega t$，I_{rf} 为射频电流振幅。RF—SQUID 环作为射频电流源的非线性负载元件。该射频电流在线圈 L_T 中产生一个射频磁通。由于线圈 L_T 和 RF—SQUID 环孔间的电磁耦合，一些射频磁通进入 RF—SQUID 环孔中，RF—SQUID 经历回滞过程，消耗能量。这些能量是从谐振电路中吸取的，从而，谐振电路两端的电压是随时间 t 变化的，记作 $V_{rf}(t)$。

通常需要观测以准静态外加磁通 ϕ_e 为参变量时的射频电流振幅 I_{rf} 和谐振电路两端的射频电压振幅 V_{rf} 的关系，即 I_{rf}-V_{rf} 特性。还要观测以 I_{rf} 为参变量时的 ϕ_e 和 V_{rf} 的关系，即 V_{rf}-ϕ_e 特性。

观测这些特性的典型电路如图 3.17。谐振电路的输出电压 $V_{rf}(t)$ 经射频放大、检波再送到示波器的 Y 轴。扼流圈的作用是阻止射频电流通过，但音频电流可以通过。音频振荡器的输出电压直接送到示波器 X 轴。开关扳到位置 A 时，可以观测 I_{rf}-V_{rf} 特性。此时，音频振荡器的信号控制调制器，使射频电流振幅 I_{rf} 受到调制，I_{rf} 随着音频信号的变化而变化。这样，示波屏上的图形就是 I_{rf}-V_{rf} 曲线。实验结果如图 3.18 a 所示。它是经过两次拍照记录下来的，代表 $\phi_e = n\phi_0$ 和 $(n+1/2)\phi_0$ 时的 I_{rf}-V_{rf} 曲线，分别叫曲线 1、2。调节直流电源的输出电流可以改变 ϕ_e，可以看出，I_{rf}-V_{rf} 曲线是一条阶梯形曲线。当 ϕ_e 从 0 起增加时，I_{rf}-V_{rf} 曲线从曲线 1 变到曲线 2，再由曲线 2 变到曲线 1，如此循环不已。

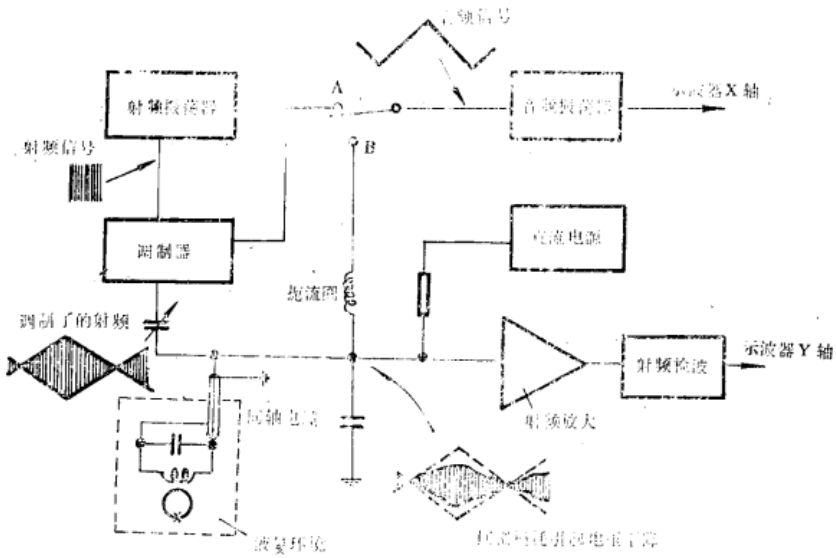


图 3.17　I_{rf}-V_{rf} 特性和 V_{rf}-ϕ_e 特性的测量电路原理图

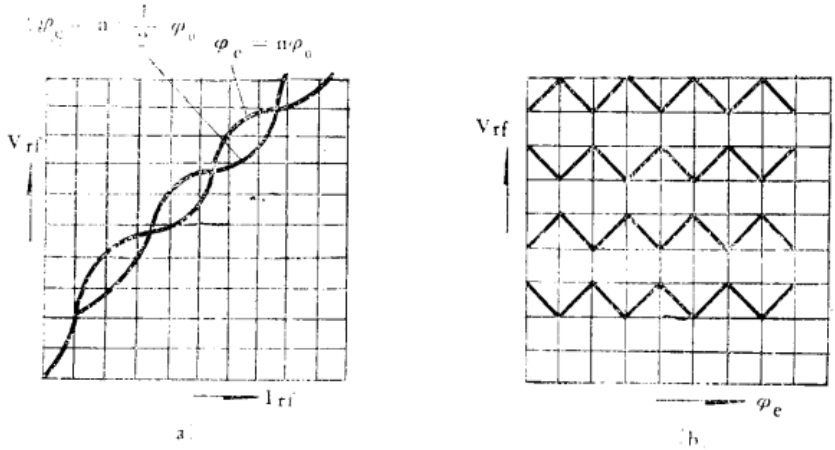


图 3.18　I_{rf}-V_{rf} 特性和 V_{rf}-ϕ_e 特性

当开关扳到 B 位置时，可以观测 V_{rf}-ϕ_e 曲线。这时，射频电流不受音频信号调制，因此，射频电流振幅 I_{rf} 不再是振荡的而是一个定值。调节射频振荡器可以改变 I_{rf}，使 I_{rf} 为某一合适数值。音频信号经扼流圈输给电感线圈 L_T，L_T 上产生一个音频磁通。这个磁通为准静态磁通 ϕ_e。这样，示波器的 X 轴成为 ϕ_e，Y 轴仍是 V_{rf}，示波屏上显示出 V_{rf}-ϕ_e 曲线。实验结果如图 3.18 b。它是经过四次拍照记录下来的，分别代表四个 I_{rf} 的 V_{rf}-ϕ_e 曲线。可以看出，V_{rf} 是 ϕ_e 的周期函数，周期为 ϕ_0。V_{rf}的极大值和极小值的大小取决于I_{rf}的大小。但不管 I_{rf}如何变化，它们总是出现在 $\phi_e = n\phi_0$及$(n+1/2)\phi_0$处。

下面，对实验结果作一些理论分析。

RF—SQUID 环满足的方程式为：

$$I_s = C\frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} + I_c \sin\theta \tag{3.29}$$

$$V = \frac{\phi_0}{2\pi}\frac{d\theta}{dt} \tag{3.30}$$

RF—SQUID 环中的全磁通 ϕ 为：

$$\phi = \phi_e - LI_s + Mi_T \tag{3.31}$$

式中 ϕ_e 为准静态外磁通，LI_s 为环流产生的磁通，Mi_T 为谐振线圈中的电流 i_T 经互感在RF-SQUID 环孔中产生的磁通，M 为谐振线圈和 RF-SQUID 间的互感，$M^2 = \alpha^2 LL_T$，α 为耦合系数。

全磁通 ϕ 和超导结两端的位相差 θ 间的关系式为：

$$\theta = \frac{2\pi\phi}{\phi_0} \tag{3.32}$$

由式(3.29)、(3.31)、(3.32)消去 I_s，得到：

$$LC\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{d\theta}{dt} + \theta + \frac{2\pi LI_c}{\phi_0}\sin\theta = \frac{2\pi}{\phi_0}(Mi_T + \phi_e) \tag{3.33}$$

谐振电路满足的方程式为：

$$L_T\frac{di_T}{dt} - M\frac{dI_s}{dt} + R_T i_T = \frac{1}{C_T}\int(I_{rf}\sin\omega t - i_T)dt \tag{3.34}$$

式中左端第 1—3 项分别为谐振线圈的自感电动势、互感电动势及电阻 R_T 上的电压。($I_{rf}\sin\omega t - i_T$)是电容中的电流。右端是谐振线圈或电容 C_T 两端的电压。

由式(3.31)、(3.32)、(3.34)，得到：

$$(1-\alpha^2)\frac{d^2 i_T}{dt^2} + \frac{R_T}{L_T}\cdot\frac{di_T}{dt} + \frac{i_T}{L_T C_T} = \frac{I_{rf}\sin\omega t}{L_T C_T} + \frac{\phi_0}{2\pi}\cdot\frac{M}{L_T L}\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{3.35}$$

式(3.33)和(3.35)是联立方程组，为了求解方便，最好将它们改写成无量纲形式，沿用推导式(3.6)的无量纲参数，可以得到：

$$\ddot{\theta} + G\dot{\theta} + \sin\theta = K[\theta_e + m\theta_T - \theta] \tag{3.36}$$

$$(1-\alpha^2)\ddot{\theta}_T + \frac{Q\omega_0}{\omega_j}\dot{\theta}_T = \left(\frac{\omega_0}{\omega_j}\right)^2\left[\theta_{rf}\sin\frac{\omega}{\omega_j}\tau - \theta_T\right] - \frac{\alpha^2}{m}\ddot{\theta} \tag{3.37}$$

其中

$$m = M/L_T,\quad \theta_T = 2\pi i_T L_T/\phi_0,\quad \theta_{rf} = 2\pi L_T I_{rf}/\phi_0 \tag{3.38}$$

$$\omega_j = \left(\frac{2\pi I_c}{\phi_0 c}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \omega_0 = \sqrt{1/L_T C_T},\quad Q = \frac{R_T}{\omega_0 L_T}$$

m 为无量纲互感，θ_T 为谐振线圈的自感磁通。θ_{rf} 为射频电流幅值。ω_0 和 Q 为谐振线圈的谐振圆频率和品质因数。ω_j 为约瑟夫逊等离子体振荡圆频率。G、K、$\ddot{\theta}$、$\dot{\theta}$、τ、θ_e 的意义同前。

可见，给定超导结、谐振线圈、环电感、耦合系统、射频电流的参数，即给定 G、K、m、ω_0、Q、θ_{rf}、α、ω 后，利用数值计算方法便可以求出 $\dot{\theta}-\tau$、$\theta_T-\tau$ 关系。求得这些关系后，便可以推知谐振线圈两端的电压 $V_T(t)$：

$$V_T(t) = \frac{1}{C_T}\int_0^t [I_{rf}\sin\omega t - i_T(t)]dt \tag{3.39}$$

进而得到 $I_{rf}-V_{rf}$ 和 $V_{rf}-\phi_e$ 关系。

影响这些关系的参数太多，它们的可能取值范围很广。要对所有参数及可能取值均作讨论，显然是很复杂的。为此我们仅讨论实用 RF-SQUID中使用的参数。即 $G\approx 1, K\lesssim 0.237$，射频电流的圆频率 $\omega \ll R/L$，耦合到 SQUID 环中的射频磁通较小即准静态单磁通量子跃迁情况。在这种情况下，不必解方程组，利用近似方法便可以得到 $I_{rf}-V_{rf}$ 和 $V_{rf}-\phi_e$ 的近似关系。它们与实验曲线定性上一致。

首先讨论 $\phi_e = n\phi_0$ 时的情况。这时加到 RF-SQUID 环中的外磁通是 $n\phi_0$ 和射频磁通之和，射频磁通为：

$$\phi_{rf}(t) = \phi_{rf}\sin\omega t \tag{3.40}$$

它是由谐振线圈中的电流产生的，ϕ_{rf} 和该电流的振幅 I_T 成正比，即

$$\phi_{rf} = MI_T = MQI_{rf} \tag{3.41}$$

由于磁通是射频的，故环流 I 及全磁通 ϕ 也是随时间变化的。

当 $I_{rf} < \dfrac{\phi_{ec}}{MQ}$ 即 $\phi_{rf} < \phi_{ec}$ 时，RF-SQUID 不会发生跃迁，因而也不消耗能量。当 I_{rf} 从 0 起缓慢增加时，全磁通 ϕ 以频率 ω 振荡，它的幅度也缓慢增加，如图 3.19a。谐振电路两端电压的振幅 V_{rf} 也随之按线性关系增加，即

$$V_{rf} = ZI_{rf}$$

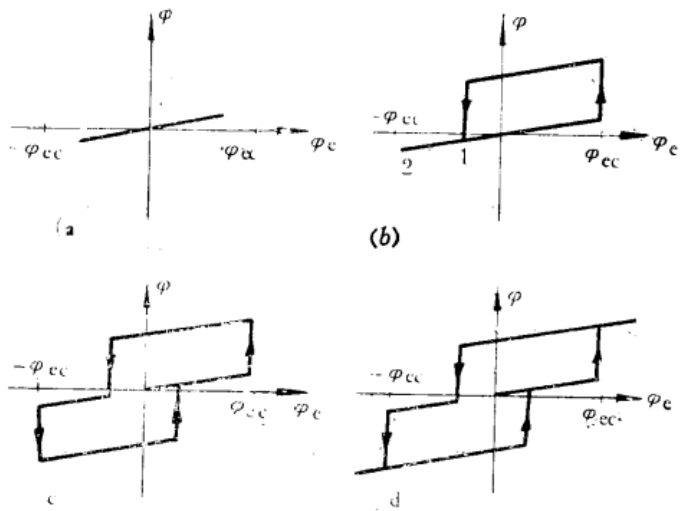


图 3.19　$\phi-\phi_e$ 关系曲线

式中 Z 为谐振电路的阻抗，$Z=Q\omega L_T=R_T$，因此 $I_{rf}-V_{rf}$ 曲线为一直线，即图 3.20 的起始段 $0A$。

当 I_{rf} 继续增加到 $I_{rf}=\phi_{ec}/MQ$ 时，作用到 SQUID 环上的射频磁通峰值 ϕ_{rf} 等于 ϕ_{ec}（相应于图 3.20 中的 A 点）。由图 3.21a 的 $I-\phi_e$ 曲线可知，这要发生跃迁，即从第 n 个量子态跃迁到第$(n+1)$个量子态或第$(n-1)$个量子态，视射频磁通的方向而定，假定它在正峰值时跃迁到第$(n+1)$个量子态。在这个过程中要从谐振电路吸取能量。谐振电路损失能量后，谐振线圈中的电流的振幅 I_T 和两端的电压 $V_{rf}(t)$ 的振幅 V_{rf} 要显著下降。由于 $\phi_{rf}=M\dfrac{V_{rf}}{\omega L_T}$，所以 ϕ_{rf} 也随之减小。这样，在射频磁通的下半个周期内，$\phi_{rf}<\phi_{ec}$，就不会发生跃迁，RF-SQUID 回到第 n 个量子态，经历的回滞环线近似为图 3.19 中的四边形，所消

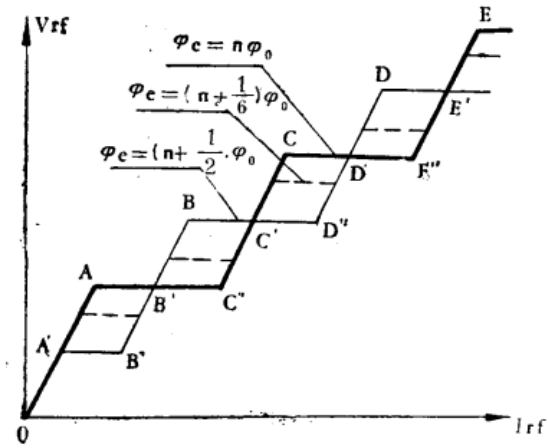


图 3.20　以 ϕ_e 为参变量的 $I_{rf}-V_{rf}$ 特性

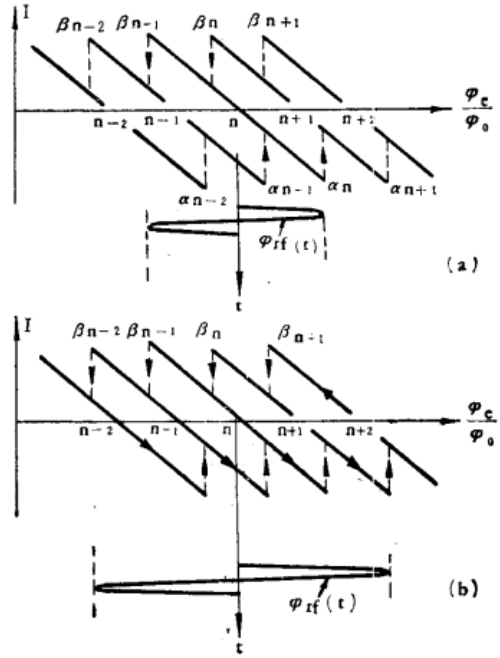


图 3.21　$I-\phi_e$ 特性

耗的能量为 ΔE。ΔE 等于环线包围的面积除以 L，假定这个环线是一个平行四边形，如图 3.22。它的水平宽度为$(2\phi_{ec}-\phi_0)$，纵向边长为 $\phi_0\left(1-\dfrac{\phi_c}{\phi_{ec}}\right)$，面积为 $\phi_0(2\phi_{ec}-\phi_0)\left(1-\dfrac{\phi_c}{\phi_{ec}}\right)$，

$$\Delta E=\frac{2\phi_{ec}\phi_0}{L\gamma_c} \tag{3.42}$$

式中

$$\gamma_c=\frac{\phi_{ec}^2}{\left(\phi_{ec}-\dfrac{\phi_0}{2}\right)(\phi_{ec}-\phi_c)} \tag{3.43}$$

注意到式(3.24)，则式(3.42)化简为：

$$\Delta E\approx\phi_0 I_c \tag{3.44}$$

V_{rf} 的减小量 ΔV_{rf} 很容易计算，因为谐振线圈中贮存的能量峰值 E 为：

$$E=\frac{1}{2}L_T I_T^2=\frac{1}{2}\frac{V_{rf}^2}{\omega^2 L_T} \tag{3.45}$$

将两端微分，整理后，得到：

$$\Delta V_{rf}=\frac{\omega^2 L_T}{V_{rf}}\Delta E \tag{3.46}$$

注意到 $V_{rf}=\omega L_T\phi_{ec}/M$

则得，

$$\Delta V_{rf}=\frac{\omega M\Delta E}{\phi_{ec}} \tag{3.47}$$

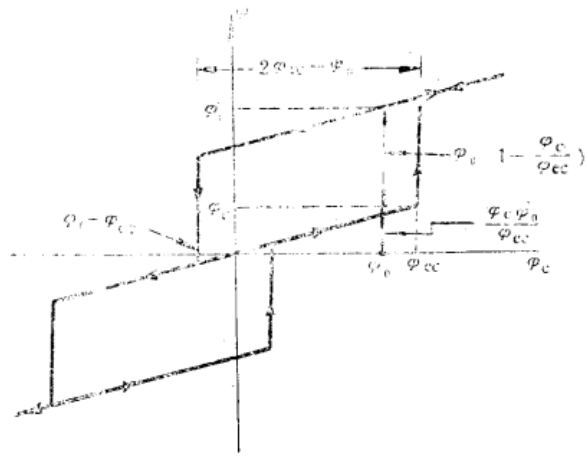


图 3.22 近似的 $\phi-\phi_e$ 特性曲线

RF-SQUID 环吸取能量的过程结束后，谐振电路的能量不再减小。相反的，由于射频电源不断地向谐振电路供给能量，经若干个射频周期后，谐振电路又得到足够的能量，I_T 又恢复到足以发生新的跃迁，使其进入 $(n+1)$ 的量子态或 $(n-1)$ 的量子态，视正方向或负方向的射频磁通中的那一个先达到 ϕ_{ec} 而定。跃迁过程中，RF-SQUID 又消耗能量，……，一切都又从头开始重复下去。I_T 在某一最大值和最小值之间振荡，V_{rf} 也作这种振荡。

若 I_{rf} 从 $I_{rf}=\frac{\phi_{ec}}{MQ}$ 起继续增加(相当于从图 3.20 的 A 点起缓慢增加)，RF-SQUID 环还是在同样 I_T 和 V_{rf} 值时发生跃迁，因此，$I_{rf}-V_{rf}$ 曲线上出现水平线段，即 $AB'C''$ 线段。这个水平线段叫做平台段。但此时能量的补充是以更高的速率进行的，跃迁也更加频繁，所经历的回滞线如图 3.19*b*，它是“长了一条尾巴”的平行四边形，尾巴即线段 12。

I_{rf} 超过 B' 点后，每经几个射频周期后，射频磁通的正峰值和负峰值都可以达到 ϕ_{ec}，因此，RF-SQUID 所经历的回滞环线成为图 3.19*c* 的样子，即经历两个回滞单元。继续增加 I_{rf}，这种两个回滞单元的跃迁更加频繁，能量的补充速率也更快。待 I_{rf} 增加到 C'' 点时，在每一个射频周期内射频电流源给谐振电路补充的能量恰好等于 $2\Delta E$，RF-SQUID 可以发生包含两个回滞环线单元的跃迁，I_T 不再减小。过了 C'' 点以后，V_{rf} 随着 I_{rf} 的增加而线性增加，平台段完结。

平台段 AC'' 的宽度 I_{st} 可以计算如下：从 A 点到 C'' 点，RF-SQUID 在每个射频周期内的能量消耗刚好多 $\Delta E\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$。这个消耗是以增加 I_{rf} 来维持的，I_{rf} 的增量即为 I_{st}，于是，

$$\frac{V_{rf}I_{st}}{2}=\Delta E\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

式中 V_{rf} 和 I_{st} 均为峰值，它们的位相相同，故功率由左端的式子表示，再考虑到式(3.42)和(3.46)，得到

$$I_{st}=\frac{2\phi_0 M}{\pi L_T\gamma_c L} \tag{3.48}$$

过了 C'' 点之后，再继续增加 I_{rf}，则谐振电路在单位时间内获得的能量又开始增加，而 RF-SQUID 每经一个回滞过程所消耗的能量仍是 $2\Delta E$，因此 I_T 和 V_{rf} 随着 I_{rf} 的增加，

$I_{rf}-V_{rf}$ 曲线上出现斜升段 $C''C'C$，$\phi-\phi_e$ 曲线成为如图 3.19d 所示的样子。

到 C 点，I_{rf} 刚好增加到使得 $\phi_{rf}=\phi_0+\phi_{ec}$，SQUID 可以跃迁到第$(n\pm2)$个量子态，斜升段完结。斜升段的水平宽度 I_r 可以计算如下：在 A 点，外磁通为 ϕ_{ec}。在 C 点为$(\phi^0+\phi_{ec})$。因此，

$$I_r=\frac{\phi_0}{MQ}-I_{st} \tag{3.49}$$

过了 C 点以后，再继续增加 I_{rf}，$I_{rf}-V_{rf}$ 曲线上又出现新的平台段 $CD'E''$。这个平台段的宽度和第一个平台段 $AB'C''$的宽度相同。在 E''点，射频电源在每个周期内供给谐振电路的能量恰好等于 SQUID 吸收的能量 $4\Delta E$，I 沿图 3.21b 的环线变化。过了 E''点后，又会出现新的斜升段。等等。

总之，$I_{rf}-V_{rf}$ 曲线是由一系列平台段和斜升段组成的。各平台段的宽度均相同，由式(3.48)表示。各斜升段的宽度也相同，由式(3.49)表示。在每个平台段右端点，SQUID 所经历的回滞单元的个数依次为 2、4、6、8、……。二相邻平台段的高度差 ΔV_0 为：

$$\Delta V_0=\frac{\omega L_T\phi_0}{M} \tag{3.50}$$

再来讨论 $\phi_e=(n+1/2)\phi_0$ 的情况。这个情况相当于把图 3.21 的纵坐标向右平移$\phi_0/2$。在射频磁通的正峰值等于$\left(\phi_{ec}-\frac{\phi_0}{2}\right)$时发生跃迁，在负峰值等于$\left(\phi_{ec}+\frac{\phi_0}{2}\right)$时发生跃迁。

当 I_{rf} 从 0 增加时，V_{rf} 象前面情况那样随 I_{rf} 线性地增加，全磁通 ϕ 以频率 ω 振荡，其振幅按图 3.23a 中的直线增加。

当 I_{rf} 增加到使得 $\phi_{rf}=\phi_{ec}-\frac{\phi_0}{2}$时，即图3.20中的 A'点，SQUID 刚能进入相邻的量子态，它经历一个回滞环线单元(图3.23b)，从 A'点起出现平台段 $A'B''$。到 B''点，每个射频周期内，在射频磁通正峰值和负峰值时都产生跃迁，于是平台段完结。这个平台段宽度只是 $\phi_e=n\phi_0$ 情况时的一半。过了 B''点，随着 I_{rf}的增加，曲线上出现斜升段 $B''B'B$，$\phi-\phi_e$ 环线增加了一条尾巴(图 3.23c)。到 B 点，开始出现两个回滞单元的跃迁(图 3.23d)，斜升段完结，第二个平台段 $BC'D''$开始。过了C'点后，三个回滞单元的跃迁开始。到D''点，在每个射频周期内，SQUID 经历象图 3.25e 那样的回滞环线，平台段完结，新的斜升段又开始。如此继续下去，我们又得到一条由一系列平台段和斜升段组成的曲线。这条曲线与 $\phi_e=n\phi_0$ 的

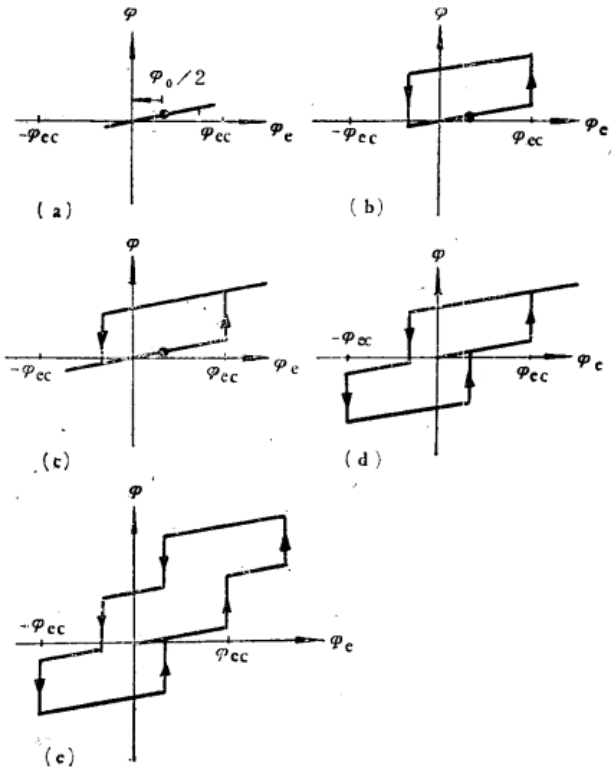


图 3.23　近似的 $\phi-\phi_e$ 曲线

曲线交错地叠在一起。每个平台段右端点相应的回滞单元个数分别为1、3、5、……。

最后，我们再来讨论 ϕ_e 从 $n\phi_0$ 向 $(n+1)\phi_0$ 逐渐增加时，$I_{rf}-V_{rf}$ 曲线的变化情况。这时，各平台段（$AB'C''$、$CD'E''$、…）都分裂成两个宽度相同的短平台，左边的各个短平台随着 ϕ_e 的增加而逐渐向下移动，右边的各个短平台则逐渐向上移动，它们移动的距离是相等的。对于第一个平台所分裂的两个短平台，左边的短平台相应的射频磁通为 $(\phi_{ec}-\phi_0)$ 时，RF-SQUID 从第0个量子态跃迁到第1个量子态；右边的短平台相应的射频磁通为 $(\phi_{ec}-\phi_0)$ 时，从第0个量子态跃迁到第-1个量子态。各短平台相应的回滞单元的个数为1、2、3、…。图3.20中描绘了 $\phi_e=(n+1/6)\phi_0$ 时的 $I_{rf}-V_{rf}$ 曲线。当 ϕ_e 增加到 $(n+1/2)\phi_0$ 时，第一个短平台降到 $A'B''$ 的高度，第二个短平台和第三个短平台处于同一高度，即合并成一个长平台 $BC'D''$。同样，第四个和第五个、第六个和第七个、……短平台分别合并成长平台，整个曲线变成 $\phi_e=(n+1/2)\phi_0$ 的 $I_{rf}-V_{rf}$ 曲线。

当 ϕ_e 从 $(n+1/2)\phi_0$ 向 $(n+1)\phi_0$ 变化时，平台 $BC'D''$、$DE'F''$、……等分裂成两个短平台，左边的各短平台向下移动，右边的各短平台及第一个平台 $A'B''$ 向上移动，待 $\phi_e=(n+1)\phi_0$ 时，又转变成为 $\phi_e=n\phi_0$ 的曲线。

二、射频偏置电流的选取

RF-SQUID 作为磁通检测器使用时，用恒定振幅的射频电流进行偏置。ϕ_e 变化时，引起 V_{rf} 的变化，通过测量 V_{rf} 的变化来确定 ϕ_e 的变化量。可见，为了使 RF-SQUID 正常工作，设计时必须做到：可以选择一个这样的 I_{rf}，对于所有的 ϕ_e，I_{rf} 处在同一个平台上，也就是说，I_{rf} 应该同时是 $\phi_e=n\phi_0$ 和 $(n+1/2)\phi_0$ 的 $I_{rf}-V_{rf}$ 曲线的某一平台上的一点的横坐标。以两条曲线的第一个平台段为例，I_{rf} 的取值应当在 A 点和 B 点之间。这个要求意味着：B'' 点应在 A 点右侧（图3.20）或者说，线段 $A'A$ 的水平宽度小于平台 $A'B''$ 的宽度，即

$$I_{rf}(A)-I_{rf}(A')\leqslant I_{rf}(B'')-I_{rf}(A') \tag{3.51}$$

式中 $I_{rf}(A')$ 为 $\phi_e=(n+1/2)\phi_0$ 的 $I_{rf}-V_{rf}$ 曲线第一个平台段左端点的横坐标，

$$I_{rf}(A')=\frac{V_{rf}^{(n+\frac{1}{2})}}{\omega L_T Q}=\left(\phi_{ec}-\frac{\phi_0}{2}\right)\Big/MQ$$

$I_{rf}(B'')$ 为该平台段右端点的横坐标，$I_{rf}(A)$ 为 $\phi_e=n\phi_0$ 的 $I_{rf}-V_{rf}$ 曲线第一个平台段左端点横坐标，

$$I_{rf}(A)=\frac{V_{rf}^{(n)}}{\omega L_T Q}=\frac{\phi_{ec}}{MQ}$$

$[I_{rf}(B'')-I_{rf}(A')]$ 为平台段 $A'B''$ 的宽度，它等于其他各平台段宽度的一半，即

$$I_{rf}(B'')-I_{rf}(A')=\frac{I_{st}}{2}=\frac{\phi_0 M}{\pi L L_T \gamma_c} \tag{3.52}$$

$[I_{rf}(A)-I_{rf}(A')]$ 为斜升段的半宽度，

$$I_{rf}(A)-I_{rf}(A')=\frac{I_r}{2}=\frac{\phi_0}{2MQ} \tag{3.53}$$

将式(3.52)和(3.53)代入式(3.51)，得到，

$$\frac{2\phi_0 M}{\pi L L_T \gamma_c}\geqslant\frac{\phi_0}{MQ}$$

注意到$M^2=\alpha^2LL_T$，则此式化简为：

$$\frac{\alpha^2Q}{\gamma_c}\geqslant\frac{\pi}{2} \tag{3.54}$$

如果进一步考虑到噪声使平台两端变圆滑的影响后，则式(3.54)修改成为：

$$\alpha^2Q\geqslant\pi\gamma_c \tag{3.55}$$

这就是说，为了使I_{rf}对于所有磁通处于同一平台上，α和Q必须满足这个不等式。同时，该式也规定了α的下限。

由式(3.51)～(3.53)容易看出，条件式(3.51)是与下面的不等式等价的：

$$I_{st}\geqslant I_r \tag{3.56}$$

考虑到$\phi_e=n\phi_0$的$I_{rf}-V_{rf}$曲线的I_{st}和I_r，对于所有各平台，都是相同的，故式(3.54)和(3.55)不仅对第一个平台适用，而且对其他任何平台也是适用的。

不过需要注意，这两个公式都是近似的，因为在推演过程中没有考虑R_T上的功率损耗。

RF-SQUID 工作时，I_{rf}选在第一个平台段A点和B''点间的某一点，或第二平台段B点和C''点间的某一点，或第三平台段C点和D''点间的某一点，……。

三、$V_{rf}-\phi_e$特性

现在我们讨论以I_{rf}为参变量的$V_{rf}-\phi_e$特性。为了具体起见，假定I_{rf}选在第一个平台段上。

首先讨论$n\phi_0<\phi_e<(n+1/2)\phi_0$情况。这时，加到 SQUID 环中的外磁通$\phi_x$为$\phi_e$和射频磁通$\phi_{rf}$之和，即

$$\phi_x=\phi_e+\phi_{rf}=\phi_e+\frac{MV_{rf}}{\omega L_T} \tag{3.57}$$

当

$$\phi_x=n\phi_0+\phi_{ec} \tag{3.58}$$

时产生量子态跃迁，由此得到跃迁时的V_{rf}为：

$$V_{rf}=-\frac{\omega L_T}{M}(\phi_e-n\phi_0-\phi_{ec}) \tag{3.59}$$

可见，V_{rf}和ϕ_e呈线性关系。这个直线的斜率为$-\omega L_T/M$。当$\phi_e=n\phi_0$时，V_{rf}取极大值$V_{rf}^{(n)}$，

$$V_{rf}^{(n)}=\frac{\omega L_T\phi_{ec}}{M} \tag{3.60}$$

当$\phi_e=(n+1/2)\phi_0$时，V_{rf}取极小值$V_{rf}^{(n+\frac{1}{2})}$，

$$V_{rf}^{(n+\frac{1}{2})}=\frac{\omega L_T}{M}\left(\phi_{ec}-\frac{\phi_0}{2}\right) \tag{3.61}$$

当ϕ_e从$n\phi_0$变化到$(n+1/2)\phi_0$时，V_{rf}从$V_{rf}^{(n)}$减小到$V_{rf}^{(n+\frac{1}{2})}$。

再来讨论$(n+1/2)\phi_0<\phi_e<(n+1)\phi_0$情况。这时 SQUID 处在第$(n+1)$量子态，产生跃迁的磁通为$[(n+1)\phi_0-\phi_{ec}]$。这个跃迁是由射频磁通的负峰值激发的，因此，跃迁时的V_{rf}为：

$$(n+1)\phi_0-\phi_{ec}=\phi_e-\phi_{rf}$$

而　　$\phi_{rf}=\dfrac{MV_{rf}}{\omega L_T}$

或

$$V_{rf}=\frac{\omega L_T}{M}[\phi_e+\phi_{ec}-(n+1)\phi_0] \tag{3.62}$$

可见，V_{rf} 和 ϕ_e 还是呈线性关系，但斜率为 $\omega L_T/M$。当 $\phi_e=(n+1)\phi_0$ 时，V_{rf} 取极大值。这个极大值仍由式(3.60)表示。当 $\phi_e=(n+1/2)\phi_0$ 时，V_{rf} 取极小值。这个极小值仍由式(3.61)表示。当 ϕ_e 从 $(n+1/2)\phi_0$ 变化到 $(n+1)\phi_0$ 时，V_{rf} 从 $V_{rf}^{(n+\frac{1}{2})}$ 增加到 $V_{rf}^{(n)}$。

综上所述，当 ϕ_e 从 0 单调增加时，V_{rf} 从 $V_{rf}^{(n)}$ 减小到 $V_{rf}^{(n+\frac{1}{2})}$，而后又增加到 $V_{rf}^{(n)}$，再减小到 $V_{rf}^{(n+\frac{1}{2})}$，……，如此循环不已，即 V_{rf} 是 ϕ_e 的周期性函数，周期为 ϕ_0。这个周期性函数的表示式即为式(3.59)和(3.62)。把它们写在一起，

$$V_{rf}=\begin{cases}-\dfrac{\omega L_T}{M}[\phi_e-\phi_{ec}-n\phi_0] & n\phi_0\leqslant\phi_e\leqslant\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\phi_0\\[2ex] \dfrac{\omega L_T}{M}[\phi_e+\phi_{ec}-(n+1)\phi_0] & \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\phi_0\leqslant\phi_e\leqslant(n+1)\phi_0\end{cases}$$

它是一条锯齿形曲线，通常叫做 RF-SQUID 的三角波。可以看出，电压调制深度 ΔV_{rf} 为：

$$\Delta V_{rf}=V_{rf}^{(n)}-V_{rf}^{(n+\frac{1}{2})}=\frac{\omega L_T\phi_0}{2M}=\frac{\omega}{2\alpha}\sqrt{\frac{L_T}{L}}\phi_0 \tag{3.63}$$

V_{rf} 对 ϕ_e 的变化率即 RF-SQUID 的正向传递函数为：

$$\frac{\partial V_{rf}}{\partial\phi_e}=\frac{\omega L_T}{M}=\frac{\omega}{\alpha}\sqrt{\frac{L_T}{L}}\qquad\left[\phi_e\neq\left(n+\frac{1}{2}\right)\phi_0\text{和}n\phi_0\right] \tag{3.64}$$

我们希望 $\dfrac{\partial V_{rf}}{\partial\phi_e}$ 大些。增大 $\dfrac{\partial V_{rf}}{\partial\phi_e}$ 的途径是减小 α，减小 L，增加 L_T 和增加 ω。对于给定的 L 和 L_T，α 不可能无限制减小，这是因为 $\alpha\to0$ 时，谐振线圈和 SQUID 环间就不存在耦合，SQUID 显然不能工作。另外，为使 SQUID 正常工作，α 必须满足条件式(3.55)。

由图 3.20 可知，I_{rf} 选在第 3、5、7、……奇数号平台段上时的 $V_{rf}-\phi_e$ 曲线和选在第 1 号平台段时的相同。I_{rf} 选在第 2、4、6、……偶数号平台段上时的 $V_{rf}-\phi_e$ 曲线仍为三角波，但极大值和极小值的位置与选在奇数号的刚好对调。当 I_{rf} 从 0 单调增加时，在示波器上可以看到三角波显现、三角波消失、反向三角波显现和消失、……如此交替变化的现象，可达几十次。

§3.4 锁定式线路

由 $V_{rf}-\phi_e$ 曲线可知，给定 ϕ_e 后，V_{rf} 也就确定了。当外磁通有一变化 $\Delta\phi_e$ 时，V_{rf} 便发生一个相应的变化 ΔV_{rf}。因此，从原则上说，测出 ΔV_{rf} 便可以定出 $\Delta\phi_e$。但实际上，这样的办法是行不通的，因为 $V_{rf}-\phi_e$ 曲线决定于超导结的参数、环孔电感和电路参数，还要受各种测量的影响，各个 RF-SQUID 的 $V_{rf}-\phi_e$ 曲线是不相同的。即使对于同一 RF-SQUID 及电路，在不同测量条件下得到的 $V_{rf}-\phi_e$ 曲线也不完全相同。鉴于此，为了测量

微小的 $\Delta\phi_e$，必须另想办法。最常用、最有效的方法是：采用锁定式自动补偿线路，往RF-SQUID 环孔中注入一个音频磁通，将 RF-SQUID 两端的电压 V_{rf} 进行调制，然后再利用相敏检波器解调。

一、音频磁通调制

设加入环孔中的外磁通量为 ϕ_e，音频调制磁通量为：

$$\phi = \phi_m \cos \omega_m t \tag{3.65}$$

式中 ω_m 为调制磁通的圆频率，

$$\omega_m = 2\pi\nu_m$$

ν_m 为调制磁通的频率，通常，$\nu_m = 10\sim30$ MHz。ϕ_m 为调制磁通的振幅。下面将要指出，ϕ_m 稍小于 $\phi_0/4$。环孔中的外加磁通量为外磁通和调制磁通之和，即

$$\phi(t) = \phi_e + \phi_m \cos \omega_m t \tag{3.66}$$

实际的 V_{rf}——ϕ_e 曲线不是严格的三角波，而是象图 3.24 那样，V_{rf} 是 ϕ_e 的任一周期函数，周期为一个磁通量子 ϕ_0。可以看出，当工作点选在 1、2、3 或 4 点时，由于调制磁通的作用，输出电压成为时间 t 的周期性函数。由数学知识，任何周期性函数都可以展开成福利哀级数。这个级数的各项分别是常数项、基波项及频率 ν_m 的各谐波项。这个事实也反映到图 3.24 中。对于工作点 2 或 4，输出电压以常数项(0 频率项)及频率为 $2\nu_m$ 的项为主。对于工作点 1 或 3，输出电压以基波频率 ν_m 项为主，但它们的位相是不同的。当 ϕ_e 从 $(n+1/2)\phi_0$ 开始增加时，二次谐波振幅逐渐减小，基波振幅逐渐增加，到 $\phi_e=(n+3/4)\phi_0$ 时，基波振幅达到最大值，到 $\phi_e=(n+1)\phi_0$ 时，基波振幅又降到接近于 0。

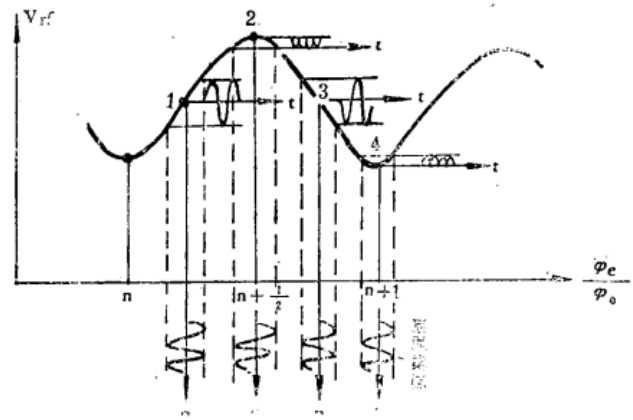


图 3.24　音频磁通调制原理图

现在进行定量研究。设 RF-SQUID 的输出电压是 ϕ_e 的任意周期性函数，记作 $V(\phi_e)$。将 $V(\phi_e)$ 展开成福利哀级数，

$$V(\phi_e) = V_0 - \sum_{i=1}^{\infty} V_i \cos i\frac{2\pi\phi_e}{\phi_0} \tag{3.67}$$

式中 $V_i(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ 为展开式的系数，它的数值取决于 $V(\phi_e)$ 的具体形式。

当准静态的外磁通 ϕ_e 和音频调制磁通加到 RF-SQUID 环孔中时，RF-SQUID 两端的电压也成为时间 t 的交变函数。因为 ω_m 比约瑟夫逊频率小很多，故可以认为 $V(t)$ 仍由上式表示，即

$$V(t) = V_0 - \sum_{i=1}^{\infty} V_i \cos\left[i\frac{2\pi\phi(t)}{\phi_0}\right]$$

$$= V_0 - \sum_{i=1}^{\infty} V_i \cos\left[i \frac{2\pi}{\phi_0} (\phi_e + \phi_m \cos \omega_m t) \right]$$

$$= V_0 - \sum_{i=1}^{\infty} V_i \left[\cos i \frac{2\pi\phi_e}{\phi_0} \cdot \cos i \left(\frac{2\pi}{\phi_0} \phi_m \cos \omega_m t \right) \right.$$

$$\left. - \sin i \frac{2\pi\phi_e}{\phi_0} \cdot \sin i \left(\frac{2\pi}{\phi_0} \phi_m \cos \omega_m t \right) \right] \qquad (3.68)$$

利用下面的恒等式将上式展开，

$$\cos(x\cos y) = J_0(x) + 2\sum_{i=1}^{\infty} J_{2i}(x)\cos 2i\left(\frac{\pi}{2} + y\right) \qquad (3.69)$$

$$\sin(x\cos y) = 2\sum_{i=1}^{\infty} J_{2i-1}(x)\sin(2i-1)\left(\frac{\pi}{2} + y\right) \qquad (3.70)$$

式中 $J_i(x)$ 为 i 阶贝塞尔函数，$i=1$，2……，不难得到，

$$V(t) = v_0 + \sum_{i=1}^{\infty} v_i \cos i\omega_m t$$

式中

$$v_0 = V_0 - \sum_{l=1}^{\infty} V_l J_0\left(l \frac{2\pi\phi_m}{\phi_0}\right)\cos\left(l \frac{2\pi\phi_e}{\phi_0}\right)$$

$$v_{2i-1} = (-1)^{i-1}\sum_{l=1}^{\infty} 2V_l J_{2i-1}\left(l \frac{2\pi\phi_m}{\phi_0}\right)\sin\left(l \frac{2\pi\phi_e}{\phi_0}\right)$$

$$v_{2i} = (-1)^{i}\sum_{l=1}^{\infty} 2V_0 J_{2i}\left(l \frac{2\pi\phi_m}{\phi_0}\right)\cos\left(l \frac{2\pi\phi_e}{\phi_0}\right)$$

可以看出，v_i 是 ϕ_e 的周期性函数，周期为 ϕ_0。当 $\phi_e = \left(n + \frac{1}{2}\right)\phi_0$ 时，$v_{2i-1} = 0$，$v_{2i} \neq 0$；当 $\phi_e = (n \pm 1/4)\phi_0$ 时，$v_{2i} = 0$，$v_{2i-1} \neq 0$。v_{2i} 和 v_{2i-1} 对于 ϕ_e 的位相不同。因为在推算过程中，仅假定 V 是 ϕ_e 的任意周期性函数，故这几个性质适用于任意周期性函数。作为特例，我们假定：

$$V(\phi_e) = V_0 - V_1 \cos \frac{2\pi\phi_e}{\phi_0}$$

这时，

$$v_0 = V_0 - V_1 J_0\left(\frac{2\pi\phi_m}{\phi_0}\right)\cos \frac{2\pi\phi_e}{\phi_0}$$

$$v_1 = 2V_1 J_1\left(\frac{2\pi\phi_m}{\phi_0}\right)\sin \frac{2\pi\phi_e}{\phi_0}$$

$$v_2 = 2V_1 J_2\left(\frac{2\pi\phi_m}{\phi_0}\right)\cos \frac{2\pi\phi_e}{\phi_0}$$

$$v_3 = -2V_1 J_3\left(\frac{2\pi\phi_m}{\phi_0}\right)\sin \frac{2\pi\phi_e}{\phi_0}$$

……

v_0，v_1，v_2，……分别为常数项、基波 $\cos\omega_m t$、二次谐波 $\cos 2\omega_m t$，……前面的系数，分别叫做各谐波的包络，当 $\phi_e=(n+1/2)\phi_0$ 时，所有奇次谐波项为 0；当 $\phi_e=(n\pm 1/4)\phi_0$ 时，所有偶次项为 0。

在 RF-SQUID 中，通常使用基波频率。当交流调制磁通的幅度 ϕ_m 从 0 增加时，输出信号幅值按 $J_1\left(\frac{2\pi\phi_m}{\phi_0}\right)$ 变化。为获得大的包络信号，交流调制电平选在 $J_1\left(\frac{2\pi\phi_m}{\phi_0}\right)$ 的第一个极大值附近，相应的 ϕ_m 约等于 $\frac{\phi_0}{4}$。

二、磁通锁定式线路

RF-SQUID 用于测量磁通变化量时，广泛使用锁定式自动补偿电路，如图 3.25。加入 RF-SQUID 环孔中的磁通，除了准静态外磁通 ϕ_e 和射频磁通外，还有音频调制磁通及补偿磁通。音频调制磁通是由音频振荡器的输出信号经射频扼流圈和电缆注入谐振线圈后而产生的，补偿磁通是运算放大器的输出信号经过同样的支路而产生的。射频电流的振幅调节到使得 RF-SQUID 环对于所有的 ϕ_e 都能偏置在 I_{rf}-V_{rf} 曲线的同一个平台上(通常选用第一个平台)，音频调制信号也调到合适值时，谐振线圈两端的电压成为被音频信号调制的射频信号，此信号经过低噪声前级放大器、主放大器、射频检波器后成为音频信号。射频检波器的输出电压和音频解调电流间呈线性关系。此音频信号再经低频放大器后到相敏检波器。相敏检波器利用同一个音频振荡器的信号作为参考信号，它的输出信号是这样的：假定 RF-SQUID 的工作点位于 V—ϕ_e 曲线的谷点处，当外磁通量 $\phi_e=(n+1/2)\phi_0$ 时，相敏检波器没有输出。当外磁通变化 $\Delta\phi_e$ 时，工作点偏离谷点，于是，便出现一次谐波，相敏检波器输出一个基波包络电压信号，此电压信号经过由运算放大器、电阻 R 和电容 C 组成的积分器成为一个斜升的电压 V_f（$\Delta\phi_e>0$ 时）或斜降的电压（$\Delta\phi_e<0$ 时），这个电压作用到反馈电阻 R_f、扼流圈及谐振线圈组成的支路上，在谐振线圈中产生一个电流。该电流又产生一个补偿磁通量 $\delta\phi$，$\delta\phi$ 和 $\Delta\phi_e$ 的正负是相反的。当斜升电压或斜降电压随时间增加到足够大时，所产生的 $\delta\phi$ 便可以完全补偿 $\Delta\phi_e$，使工作点重新回到谷点，相敏检波器的输出又变为零，V_f 也不再增加。此时的 V_f 或电流计的示值正比于 $\Delta\phi_e$，经标定后，便可以定出 $\Delta\phi_e$。

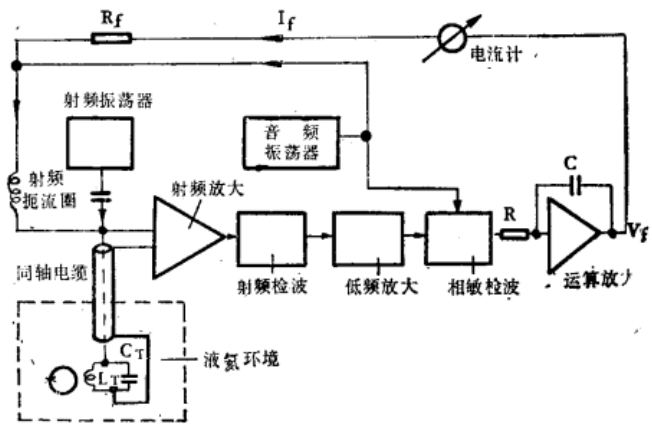


图 3.25 磁通锁定式自动补偿电路方框图

由上述可知，RF-SQUID 总是工作在常磁通状态，用来作为锁定系统的指零器，因此，一些漂移(如液氦温度变化所产生的临界电流的漂移、偏置电流的漂移、低温区导线的热电势的漂移)的影响较小。

§3.5 磁通噪声和能量分辨率

一、磁通噪声

RF-SQUID 的磁通噪声有以下几种：RF-SQUID 的固有磁通噪声；谐振线路的噪声；射频放大器产生的经谐振电路在环孔中感应的磁通噪声；射频放大器产生的，不跟环孔耦合，直接迭加在输出信号上的噪声；整个系统的噪声经负反馈电阻回灌到 SQUID 环孔中的噪声。最后一项噪声通常比其他噪声小很多，可以忽略。放大器产生的噪声可用一个等效噪声来表示。

1．固有噪声

在前面的讨论中，我们一直认为 RF-SQUID 跃迁时的磁通值是严格确定的。比如，对于从第 0 号量子态到第 1 号量子态的跃迁，该磁通值等于 ϕ_{ec}，当 $\phi_e<\phi_{ec}$ 时不会发生跃迁。而事实上，由于热涨落的影响，$\phi_e<\phi_{ec}$ 时也会发生跃迁，即具有不等于零的跃迁几率。文献[17]中指出，超导结的电流和量子位相是正弦关系时，跃迁时的 ϕ_e 值具有一定的分布，其标准偏差为：

$$\sigma=\left(\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\sigma_0 L\bar{I}_c\left(\frac{K_BT}{\phi_0 I_c}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{3.72}$$

式中 I_c 为超导结的临界电流，L 为 RF-SQUID 环电感，K_B 为波尔兹曼常数，T 为超导环的绝对温度。σ_0 约等于 1。对于 $T=4.2\mathrm{K}$，$L=5\times10^{-10}\mathrm{H}$，$I_c=8\mu\mathrm{A}$，$\sigma=\frac{\phi_0}{20}$，此式已为实验证实。

跃迁时 ϕ_e 的涨落有两个影响：第一，使得 V_{rf} 跟着涨落，相应的固有磁通噪声频谱密度为：

$$S_\phi^{(i)}\approx0.5\left(\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)L^2I_c^{\frac{2}{3}}\left(\frac{K_BT}{\phi_0}\right)^{\frac{4}{3}} \tag{3.73}$$

对于上面的几个参数值，$S_\phi^{(i)1/2}=0.07\ \phi_0\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{1/2}$。如果电流——位相关系不是正弦式的，那么，噪声要比上式给出的值高一些；第二，平台段的两端变得圆滑，平台段也倾斜，如图 3.26。平台段倾斜的原因可以解释如下，以从第 0 号量子态向第 1 号量子态跃迁为例，无热涨落时，跃迁时的磁通严格地等于 ϕ_{ec}。有热涨落时，对于更低的磁通也有一定的跃迁几率，在图3.20的 A 点右侧邻近 A点处，在很多个射频周期内才产生一次磁通峰值处的跃迁，因此在某一个周期内产生跃迁的几率是很小的。在 B' 点的左侧邻近 B' 点处，右射频磁通每一个峰值处必然产生跃迁，跃迁几率等于 1。为了增加跃迁几率，就要稍稍增加射频磁通的振幅，也即稍稍增加 I_{rf}。当

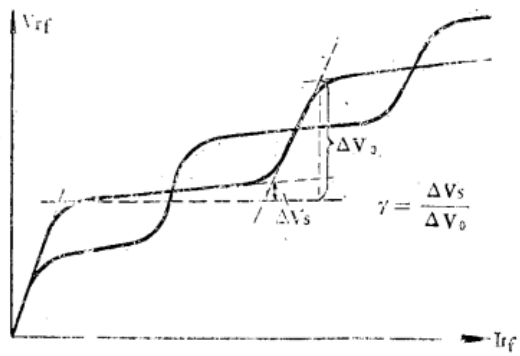


图 3.26 噪声使 I_{rf}-V_{rf} 曲线的平台段倾斜

I_{rf} 从 A 点的 $I_{rf}(A)$ 增加到 B' 点的 $I_{rf}(B')$ 的过程中，ϕ_e 也相应的从 $\phi_e(A)$ 增加到 $\phi_e(B')$。与此同时，跃迁几率也相应增加。因为 ϕ_{rf} 正比于 V_{rf}，所以，V_{rf} 也要变化，从 $V_{rf}(A)$ 增加到 $V_{rf}(B')$。V_{rf} 除了数值增大以外，它的取值几率也增加，这是因为 V_{rf} 是涨落的，它的涨落和跃迁时的 ϕ_e 值的涨落相对应。这两个因素都使平台倾斜。为了定量描述这个倾斜引入参数 γ。γ 的定义为沿平台段的电压增加量 ΔV_S 和相邻平台的电压间隔 ΔV_0 之比。理论和实验结果都指出，γ 和 $S_\phi^{(i)}$ 的关系为：

$$\frac{\gamma^2}{(1-\gamma)^2} \approx S_\phi^{(i)} \frac{\omega}{\pi\phi_0^2}$$

或

$$S_\phi^{(i)} = \frac{\gamma^2}{(1-\gamma)^2} \phi_0^2 \frac{\pi}{\omega} \tag{3.74}$$

由于平台段倾斜，须对公式(3.64)进行修正。修正后的公式为：

$$\frac{\partial V_{rf}}{\partial \phi_e} = (1-\gamma)\frac{\omega L_T}{M} \tag{3.75}$$

2．谐振电路的噪声[18]

谐振电路负载电阻 R_T 中的热噪声在谐振线圈 L_T 中产生电流噪声。这个电流噪声叠加在射频电流上，使得 RF-SQUID 的偏置电流 I_{rf} 成为涨落的。由于平台段倾斜，即 $\frac{dV_{rf}}{dI_{rf}} \neq 0$，$I_{rf}$ 的涨落又引起 V_{rf} 的涨落，V_{rf} 的涨落又产生一定的磁通噪声。现在就来计算这个磁通噪声频谱密度。

对于某一平台段，其斜率为：

$$\frac{dV_{rf}}{dI_{rf}} = \frac{\gamma \Delta V_0}{I_{st}} \tag{3.76}$$

考虑到 I_{st} 和 ΔV_0 的表示式(3.48)和(3.50)以及 $M^2 = \alpha^2 L L_T$，上式变成为：

$$\frac{dV_{rf}}{dI_{rf}} = \frac{\pi\gamma\omega L_T \gamma_c}{2\alpha^2} \tag{3.77}$$

再定义谐振电路在平台段上的等效品质因数 Q_{eff} 为：

$$Q_{eff} = \frac{dV_{rf}}{dI_{rf}} \cdot \frac{1}{\omega L_T} \tag{3.78}$$

利用(3.77)式。把式中的 $\frac{dV_{rf}}{dI_{rf}}$ 消去，得到：

$$Q_{eff} = \frac{\pi\gamma\gamma_c}{2\alpha^2} \tag{3.79}$$

谐振线圈 L_T 的电流噪声在谐振频率上的频谱密度为：

$$S_I^{(c)} = \frac{4K_B T_e}{R_T} = \frac{4K_B T_e}{Q\omega L_T} \tag{3.80}$$

式中 $Q = \frac{R_T}{\omega L_T}$ 为谐振电路的品质因数，T_e 为谐振电路的等效噪声温度，对于典型的 RF-SQUID系统，$T_e \approx 200\text{K}$。

与 $S_I^{(c)}$ 相应的电压噪声频谱密度为：

$$S_V^{(c)} = Q_{eff}^2 \omega^2 L_T^2 S_I^{(c)} \tag{3.81}$$

由(3.75)、(3.77)、(3.79)～(3.81)式容易得到谐振电路的等效磁通噪声频谱密度为：

$$S_\phi^{(tc)} = \left(\frac{\pi\gamma\gamma_c}{1-\gamma}\right)^2 \frac{K_B T_e L^2 L_T}{\omega Q M^2} \tag{3.82}$$

3．前级放大器的噪声

前级放大器的电压噪声频谱密度为：

$$S_{VP} = 4K_B T_{NP}\left(\frac{dV_{rt}}{dI_{rf}}\right) = 2\pi\gamma\gamma_c\omega L_T K_B T_{NP}/\alpha^2 \tag{3.83}$$

式中 T_{NP} 为前级放大器的噪声温度。由(3.75)式，S_{VP} 相应的磁通噪声频谱密度为：

$$S_\phi^{(p)} = \left[\frac{M}{\omega L_T(1-\gamma)}\right]^2 S_{VP} \tag{3.84}$$

通常 $S_{VP}\approx 2\times10^{-9}\mathrm{VHz}^{-1/2}$，$\gamma=0.2$，$\frac{\omega}{2\pi}=30\mathrm{MHz}$，$L_T=5\times10^{-7}\mathrm{H}$，$\alpha^2=0.2$，于是 $T_{NP}\approx 50\mathrm{K}$。

4．总磁通噪声

总磁通噪声为固有磁通噪声、谐振电路的磁通噪声、前级放大器的磁通噪声之和，即：

$$S_\phi = \frac{\pi\gamma^2\phi_0^2}{\omega(1-\gamma)^2} + \left(\frac{\pi\gamma\gamma_c}{1-\gamma}\right)^2 \frac{K_B T_e L^2 L_T}{\omega Q M^2} + \left[\frac{M}{\omega L_T(1-\gamma)}\right]^2 S_{VP} \tag{3.85}$$

S_ϕ 也叫做 SQUID 的磁通灵敏度。$S_\phi/2L$ 叫做 SQUID 的固有能量分辨率。SQUID 之所以受到人们重视，就在于它的 S_ϕ 和 $S_\phi/2L$ 比常规仪器的相应量小几个数量级。

二、能量分辨率

在 RF-SQUID 的绝大多数应用中，被测磁通是借助于超导输入线圈耦合到 SQUID 环中去的(详见下面的磁通变换器一节)。在这种情况下，为了充分表征一个磁通检测器的性能，仅仅知道 SQUID 本身的磁通噪声是不够的，还必须知道它和输入线圈的耦合情况。假定输入线圈的自感系数为 L_i，它和 SQUID 环的互感系数为 M_i，

$$M_i^2 = k^2 L_i L \tag{3.86}$$

式中 L 为环电感，k 为输入线圈和 SQUID 环间的耦合系数。

输入线圈的最小可检测电流为：

$$\Delta I_i = \frac{S_\phi^{1/2}}{M_i}$$

相应的最小可检测能量为：

$$\varepsilon = \frac{1}{2} L_i (\Delta I_i)^2 \tag{3.87}$$

消去 ΔI_i 得到：

$$\varepsilon = \frac{S_\phi}{2k^2 L} \tag{3.88}$$

ε 叫做 SQUID 和输入线圈的组成系统的能量分辨率，它是表征该系统性能的物理量。通常 ε 愈小，则性能愈好。人们往往以获得最小的 ε 作为设计依据。

RF-SQUID 的能量分辨率 ε 的表示式为：

$$\varepsilon = S_\phi / 2k^2 L = \frac{1}{2k^2 L}\left[\frac{\pi\gamma^2\phi_0^2}{\omega(1-\gamma)^2} + \left(\frac{\pi\gamma\gamma_c}{1-\gamma}\right)^2 \frac{K_B T_e L}{\omega Q \alpha^2} + \frac{\alpha^2 L S_{VP}}{\omega^2 (1-\gamma)^2 L_T}\right] \tag{3.89}$$

现在我们进一步讨论如何使一个给定 RF-SQUID 的 ε 相对于 α 取极小值的问题[8]。讨论以下四种情况。图 3.27 示出它们的 $\varepsilon-\alpha^2$ 曲线。

1. 对于图 3.27*a* 所示的系统，$\frac{\pi\gamma_0}{Q}>1$，不具备作为 RF-SQUID 的必要条件：

$$\alpha^2 Q \geqslant \pi\gamma_c$$

所以，该系统不能作为磁通检测器。

2. 对于图 3.27*b* 所示的系统，斜线表示的区域是可以用作磁通检测器的区域。当

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 = \frac{\pi\gamma_c}{Q} \tag{3.90}$$

时，ε 取极小值 ε_1。ε_1 为

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi\gamma^2\phi_0^2}{2k^2 L\omega(1-\gamma)^2} + \frac{\pi\gamma^2\gamma_c K_B T_e}{2k^2\omega(1-\gamma)^2} + \frac{\pi\gamma_c S_{VP}}{2k^2 Q\omega^2 L_T(1-\gamma)^2} \tag{3.91}$$

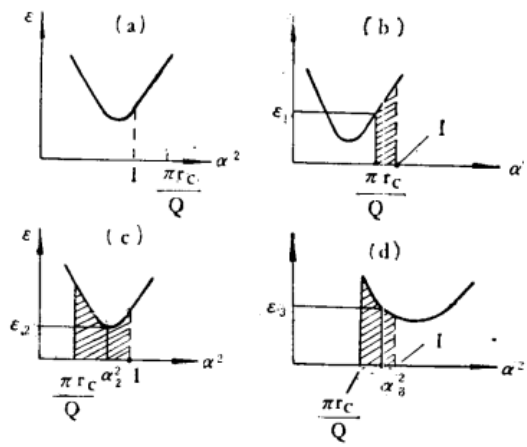


图 3.27 $\varepsilon-\alpha^2$ 曲线

3. 对于图 3.27*c* 所示的系统，最佳耦合系数 α_2 为：

$$\alpha_2^2 = \frac{\pi\gamma\gamma_c}{Q}\left(\frac{K_B T_e \omega L_T Q}{S_{VP}}\right)^{1/2} \tag{3.92}$$

能量分辨率的极小值 ε_2 为

$$\varepsilon_2 = \frac{\pi\gamma^2\phi_0^2}{2k^2 L\omega(1-\gamma)^2} + \frac{\pi\gamma\gamma_c}{k^2\omega(1-\gamma)^2}\left(\frac{k_B T_e S_{VP}}{Q\omega L_T}\right)^{1/2} \tag{3.93}$$

4. 对于图 3.27*d* 所示的系统，当 $\alpha^2=1$ 时，ε 取极小值。但实际上，α 很难接近于 1，因此，要尽量加大 α，使 ε 减小。将 α 的实际最大值 α_3 代入式(3.89)，便得 ε 的极小值 ε_3 的公式为：

$$\varepsilon_3 = \frac{\pi\gamma^2\phi_0^2}{2k^2 L\omega(1-\gamma)^2} + \frac{K_B T_e}{2k^2\omega Q\alpha_3^2}\left(\frac{\pi\gamma\gamma_c}{1-\gamma}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2 S_{VP}}{2k^2\omega^2 L_T(1-\gamma)^2} \tag{3.94}$$

由式(3.91)、(3.93)、(3.94)可知，$\varepsilon_j(j=1,\ 2\ 或\ 3)$和输入线圈参数、RF-SQUID环电感、超导结参数、谐振电路和放大器参数、射频偏置频率等有关。

应用更高的偏置频率可以减小 ε_j，但它的有效性取决于 $S_{VP}/Q\omega L_T$ 和 ω 的依赖关系。一味增加射频偏置频率并不能自动减小 ε_j，通常，最高偏置频率是 430～440MHz[19]。

减低放大器和谐振线路的噪声可以减小 ε_j，为此，人们研制出工作在液氦中的前级放大器[20]。

ε_j 和超导结临界电流 I_c、环电感 L 的关系取决于 γ_c。由式(3.43)，可以得到它们间的

数量关系。当 $2\pi LI_c/\phi_0 > 2\pi$ 时，γ_c 较小，因此 ε_j 也较小。但 $2\pi LI_c/\phi_0$ 不能太大，因为它对减小 ε_j 的作用已不显著，并且会提供多磁通量子跃迁的可能性。因此，为使RF-SQUID更好的运行，所选 LI_c 必须满足下式：

$$\frac{LI_c}{\phi_0} = 1 \sim 3 \tag{3.95}$$

相应的 K 值为 0.06～0.17，即比前述的单纯考虑多磁通量子跃迁时的取值要小一些。

为减小 ε_j，还必须尽量增加 k，k 取决于 RF-SQUID 环电感 L、输入信号线圈电感 L_i 及它们间的相对位置。L 小时，k 不容易大。RF-SQUID 的几何形状和尺寸不合适时，k 也很小。

总之，为了使 RF-SQUID 具有最好的性能必须同时做到以下几点：1. 必须应用更高的射频偏置频率、较高的谐振阻抗和较小的放大器噪声。这些由优良的电子线路来保证；2. 必须应用临界电流和电阻合适的超导结。这由完善的制作超导结工艺来保证；3. 必须选择合适的 RF-SQUID 环电感，使 RF-SQUID 环和输入信号线圈之间的耦合最强，使得RF-SQUID 环和谐振线圈间的耦合系数可以调节并能调节到最佳耦合系数。这些由合适的 RF-SQUID 探头形状、尺寸及这些电感来保证。

合适的 RF-SQUID 探头还要有屏蔽外电磁辐射的作用。

文献[18]指出，磁通运动、外磁通噪声、超导结的回滞也影响 RF-SQUID 的磁通灵敏度。

§3.6 摆　　率

一、锁定式线路的通频带和磁通噪声的关系

上述的磁通锁定式线路方框图可以进一步化简成图 3.28。磁通被锁定在 V_{rf}—ϕ_e 曲线的谷点或峰点，即磁通量子的半整数倍或整数倍。外磁通 ϕ_e 相对于谷点或峰点的变化量

$$\Delta\phi_e = \phi_e - \left(n + \frac{1}{2}\right)\phi_0 \text{ 或 } \Delta\phi_e = \phi_e - n\phi_0 \tag{3.96}$$

图中 G 表示 SQUID 环到相敏检波器前的所有电路及其传递函数，G_F 表示积分器及其传递函数。该积分器起着低通滤波器的作用。为简单起见，假定它是一级低通滤波器，传递函数的表示式为：

$$G_F = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \tag{3.97}$$

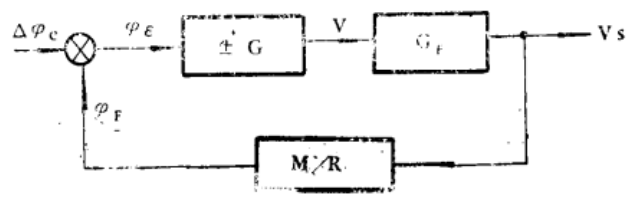


图 3.28　磁通锁定式线路的方框图

τ 为积分器的时间常数，$\frac{1}{2\pi\tau}$ 为开环截止频率。反馈磁通 ϕ_F 为：

$$\phi_F = \pm A_F\phi_\epsilon \tag{3.98}$$

$A_F = \frac{MGG_F}{R}$ 为锁定式线路的正向增益，R 为反馈电阻，M 为 SQUID 环和谐振线圈间的互感系数。锁定点为 $n\phi_0$ 时取正值，锁定点为 $\left(n + \frac{1}{2}\right)\phi_0$ 时取负值。ϕ_ϵ 为差值磁通，

$$\phi_e = \Delta\phi_e - \phi_F \tag{3.99}$$

由式(3.98)、(3.99)，消去 ϕ_F，得到，

$$\Delta\phi_e = (1 \pm A_F)\phi_s \tag{3.100}$$

该 SQUID 系统的输出电压 V_s 为：

$$V_s = \pm GG_F\phi_e \tag{3.101}$$

由以上几式容易得到 V_s 的另一表示式：

$$V_s = \frac{R}{M}\frac{A_F}{1+A_F}\left[\phi_e - \frac{K+1}{2}\phi_0\right] \qquad (K = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{3.102}$$

K 为奇数时，A_F 取正值，K 为偶数时，取负值。此式表明，RF-SQUID有着一系列等几率亚稳态，锁定在某一亚稳态时，输出电压 V_s 便正比于外磁通相对于该锁定点的变化量 $\Delta\phi_e$。但是，$\Delta\phi_e$ 瞬时地超过 $\phi_0/4$ 而又重新小于 $\phi_0/4$ 时 RF-SQUID 将会离开这个亚稳态，并跃迁到其他 K 值的亚稳态。这个过程叫做失锁和重新锁定。可见，SQUID 不能用于 ϕ_e 变化很快的情况下。SQUID 不失锁的最大磁通变化率叫做 SQUID 的摆率。摆率是SQUID系统的一个重要性能指标。

RF-SQUID 的摆率决定于噪声、积分器的通带、音频磁通调制频率等。为了简化分析，假定 SQUID 环的固有噪声、谐振线路的噪声比放大器的噪声小很多，可以忽略，只需考虑放大器的噪声。射频放大器产生的噪声有两个，一个是射频放大器产生的经谐振电路在 SQUID 环中感应的磁通噪声；另一个是射频放大器产生的、不跟 SQUID 环耦合，直接叠加在输出信号上的噪声。设它们的频谱密度分别为 $S_{\phi 1}$ 和 $S_{\phi 2}$，磁通噪声的瞬时值为 ϕ_1 和 ϕ_2。它们是不相关的，于是，总的等效磁通噪声频谱密度为：

$$S_{\phi b} = S_{\phi 1} + S_{\phi 2} \tag{3.103}$$

考虑放大器磁通噪声时，RF-SQUID 系统的输出电压 V_s 的关系式(3.102)成为：

$$V_s = \frac{R}{M}\frac{A_F}{1+A_F}(\Delta\phi_e + \phi_1 + \phi_2) \tag{3.104}$$

$\Delta\phi_e$ 和差值磁通 ϕ_e 的关系式成为：

$$\phi_e = \frac{\Delta\phi_e}{1+A_F} + \frac{\phi_1}{1+A_F} + \frac{A_F}{1+A_F}\phi_2 \tag{3.105}$$

可以看出，此式右端最后二项是总等效磁通噪声的瞬时值 ϕ_b，

$$\phi_b = \frac{\phi_1}{1+A_F} + \frac{A_F}{1+A_F}\phi_2 \tag{3.106}$$

闭环时，积分器的上截止频率 f_c 为：

$$f_c = \frac{MG}{R}\frac{1}{2\pi\tau}$$

假定在频率大于 f_c 的频率范围内噪声是白噪声，则放大器的两种噪声的方均值为：

$$\langle\phi_1^2\rangle = \frac{\pi}{2}f_cS_{\phi 1} \tag{3.107}$$

$$\langle\phi_2^2\rangle = \frac{\pi}{2}f_cS_{\phi 2} \tag{3.108}$$

式中 $\frac{\pi}{2}f_c$ 是积分器的等效噪声带宽。

由式(3.106)～(3.108)，可得总等效磁通噪声方均值为：

$$\phi_N^2=\langle\phi_b^2\rangle=\left\{\left[\frac{1}{1+A_F}\right]^2S_{\phi 1}+\left[\frac{A_F}{1+A_F}\right]^2S_{\phi 2}\right\}\left(\frac{\pi}{2}f_c\right) \tag{3.109}$$

对于频率远大于 $\frac{1}{2\pi\tau}$ 并远小于 f_c 的频率范围，式(3.109)可以简化为：

$$\phi_N^2\approx\left(\frac{S_{\phi 1}}{A_F^2}+S_{\phi 2}\right)\left(\frac{\pi}{2}f_c\right) \tag{3.110}$$

若 $S_{\phi 1}\approx S_{\phi 2}$，$A_F\gg 1$，则式(3.110)化简为：

$$\phi_N^2\approx 1.25S_{\phi 2}f_c \tag{3.111}$$

二、失锁几率和平均失锁时间

失锁几率 p 的定义是：

$$p=t_mN$$

式中 N 为单位时间内的失锁次数，t_m 为平均失锁时间。可见，p 为单位时间内的总失锁时间。由前述已知，当总的等效磁通噪声和差值磁通之和超过 $\phi_0/4$，即

$$|\phi_\epsilon+\phi_b|\geqslant\frac{\phi_0}{4} \tag{3.112}$$

时，SQUID 系统失锁。

重新锁定时，一般不会锁在原谷点。在 $(\phi_\epsilon+\phi_b)\geqslant\phi_0/4$ 的时间 t_1 内，SQUID 系统一直失锁。文献[21]指出，t_1 的平均值 t_{1m} 约为 10^{-7} S的量级。$(\phi_\epsilon+\phi_b)$刚小于 $\phi_0/4$ 到被锁定在另一个谷点之前，该系统仍然失锁，与此相应的失锁时间 t_2 决定于 SQUID 的时间常数 L/R，式中 L 为环电感，R 为结电阻，$t_2\approx 10^{-9}$ S。因此，$t_2\ll t_{1m}$。于是，总的失锁时间 t_m 约为 t_{1m}。

锁定后，该 SQUID 系统在时间 $\frac{1}{2\pi f_c}$ 内重新恢复稳定。$\frac{1}{2\pi f_c}$ 为反馈环的时间常数。$f_c=200$ kHz 时，这段时间为 10^{-7} S 的量级，约等于 t_{1m}。

现在再来研究失锁几率的关系式。假定等效磁通噪声 ϕ_b 遵从高斯分布：

$$p(\phi_b)=\left[\frac{1}{2\pi\phi_N}\right]^{1/2}\exp\left(-\frac{\phi_b^2}{2\phi_N^2}\right) \tag{3.113}$$

于是，由式(3.112)，p 的表示式为：

$$1-p=\frac{1}{2}\left\{\theta\left[\left(\frac{\phi_0}{4}+\phi_\epsilon\right)\Big/\phi_N\right]+\theta\left[\left(\frac{\phi_0}{4}-\phi_\epsilon\right)\Big/\phi_N\right]\right\} \tag{3.114}$$

式中

$$\theta(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du \tag{3.115}$$

由式(3.114)可以得到任一给定磁通噪声 ϕ_N 和失锁几率不大于 p 时的差值磁通 $\phi_\epsilon(p,\phi_N)$。

三、摆率

由式(3.100)，对于任一给定的噪声磁通 ϕ_N，当要求失锁几率不大于 p 时，输入磁通的变化量 $\Delta\phi_e$ 必须满足以下条件：

$$|\Delta\phi_e| < |\phi_\epsilon(p,\phi_N)| \cdot |1+A_F|$$

不失锁的输入磁通的最大变化量为：

$$|\Delta\phi_e|_{max} = |\phi_\epsilon(p,\phi_N)| \cdot |1+A_F| \tag{3.116}$$

在频率 f 远大于 $\frac{1}{2\pi\tau}$ 和远小于 f_c 的频带内，式(3.116)化简为：

$$|\Delta\phi_e|_{max} = |\phi_\epsilon(p,\phi_N)| \frac{f_c}{f} \tag{3.117}$$

频率为 f 的正弦输入磁通对时间的最大变化率即摆率 S 为：

$$S = 2\pi f |\Delta\phi_e|_{max} = 2\pi f_c |\phi_\epsilon(p,\phi_N)| \tag{3.118}$$

通常人们希望 S 大，为此，f_c 要大。但 f_c 的最大值为音频调制磁通的频率 f_m，于是，在

$$f_c = f_m \tag{3.119}$$

的最佳条件下，摆率 S 为：

$$S = 2\pi f_m |\phi_\epsilon(f_m, S_{\phi 2}, p)| \tag{3.120}$$

式中的 ϕ_ϵ 由式(3.111)和(3.114)决定，即

$$1-p = \frac{1}{2}\left[\theta\left(\frac{\frac{\phi_0}{4}+\phi_\epsilon}{1.25 S_{\phi 2}^{1/2} f_m^{1/2}}\right) + \theta\left(\frac{\frac{\phi_0}{4}-\phi_\epsilon}{1.25 S_{\phi 2}^{1/2} f_m^{1/2}}\right)\right] \tag{3.121}$$

可见，S 取决于调制频率 f_m、失锁几率 p 及磁通噪声 $S_{\phi 2}$。它们的关系曲线如图3.29所示。当磁通噪声可以忽略时，最大允许差值磁通为 $\phi_0/4$，$S-f_m$ 曲线成为所有的 $S-f_m$ 曲线过原点的切线。该切线的方程式为：

$$S = \frac{\pi}{2} f_m \qquad (\phi_0/S) \tag{3.122}$$

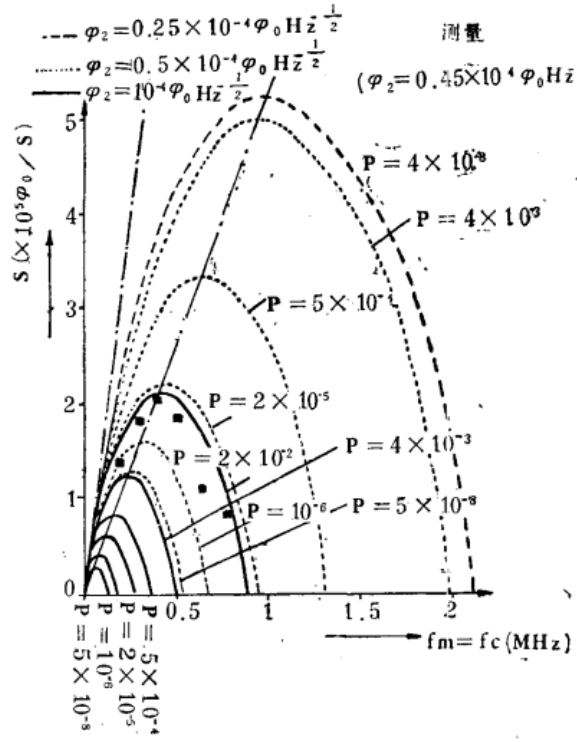


图 3.29　摆率和调制频率、失锁几率、磁通噪声的关系

此式表明，当不计噪声时，摆率随调制磁通频率的增加而提高。当噪声不能忽略时，对于给定的 $S_{\phi 2}$ 和 p，f_m 从较小值开始增加时 S 跟着增加，过了峰值后，又逐渐减小，最后减小到零。这些曲线在失锁几率较小($p \leqslant 10^{-3}$)、差值磁通 ϕ_ϵ 足够大的情况下，可以用下式表示：

$$S = 2\pi f_m\left[\frac{\phi_0}{4} - 1.25 S_{\phi 2}^{1/2} f_m^{1/2} \theta^{-1}(1-2p)\right] \tag{3.123}$$

将此式对 f_m 取极值，得最大摆率 S_{max} 及其相应的最佳调制频率 f_{mop} 为

$$f_{mop}=\left\{\frac{\phi_0}{7.5S_{\phi 2}^{1/2}[\theta^{-1}(1-2p)]}\right\}^{2} \tag{3.124}$$

$$S_{max}=\frac{\pi}{6}f_{mop} \qquad (\phi_0/S) \tag{3.125}$$

可以看出，S_{max} 和 $S_{\phi 2}$ 成反比。

文献[21]中指出，$S_{\phi 2}=5\times10^{-5}\phi_0 Hz^{-1/2}$ 和 $p=5\times10^{-10}$（相应于每20分钟失锁一次）时，最佳调制频率为 250kHz，相应的摆率为 $1.3\times10^5\phi_0/S$，而实验结果表明，对于圆柱形薄膜微桥结 RF-SQUID（环电感为 0.5nH，超导结的临界电流和结电阻分别为 10μA 和 1Ω），最佳调制频率为 400kHz，相应的摆率为 $2.1\times10^5\phi_0/S$。实验结果和计算结果的差别是由于：利用示波器很难精确测定失锁次数或相对失锁时间，实际的失锁几率比 5×10^{-10} 要大。

关于使用二级低通滤波器的 RF-SQUID 的摆率计算问题，可以参阅文献[21]。

§3.7 环电感计算

如前所述，SQUID 环电感即自感系数的大小对 RF-SQUID 性能有很大影响。在设计 SQUID 探头时，必须确定它的最佳结构形式和自感。

超导环的自感、超导环间的互感的定义和通常导体线圈的自感、互感的定义是相同的，但因超导体的完全抗磁性，它们的计算公式却不相同[22]。设有两个超导环路 1 和 2，其中的电流强度分别为 I_1 和 I_2，

$$I_1=\int_{S_1}\vec{j}_1\cdot\vec{dS}_1 \tag{3.126a}$$

$$I_2=\int_{S_2}\vec{j}_2\cdot\vec{dS}_2 \tag{3.126b}$$

式中 $\vec{j}_1$ 和 $\vec{j}_2$ 分别为超导环 1 和 2 中面积元 dS_1 和 dS_2 处的传导电流密度，积分是对整个环路截面积 S_1 和 S_2。由于完全抗磁性，超导环路中还有屏蔽电流密度 $\vec{j}_{12}$ 和 $\vec{j}_{21}$，但屏蔽电流强度为 0，即

$$\int\vec{j}_{12}\cdot\vec{dS}_2=0 \tag{3.127a}$$

$$\int\vec{j}_{21}\cdot\vec{dS}_1=0 \tag{3.127b}$$

式中 $\vec{j}_{12}$ 是超导环 1 在超导环 2 中产生的屏蔽电流密度，$\vec{j}_{21}$ 是超导环 2 在超导环 1 中产生的屏蔽电流密度。

超导环 1 的自感 L_1 的定义是：

$$L_1=\frac{\phi_1}{I_1}=\frac{1}{I_1}\int(\mu_0\lambda_1^2\vec{j}_1+\vec{A}_1)\cdot\vec{dl} \tag{3.128}$$

其中

$$\vec{A}_1(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int\frac{\vec{j}_1(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau_1'+\int\frac{\vec{j}_{12}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau_2'\right] \tag{3.129}$$

式中 ϕ_1 为超导环 1 中的电流 I_1 产生的全磁通，ϕ_1 和孤立超导环 1 通有电流 I_1 时的全磁通不相同，这是因为超导环 2 的完全抗磁性的影响；$\vec{A}_1$ 为超导环 1 中的磁矢势，它是超导环 1 中的传导电流密度和超导体 2 中的屏蔽电流密度的函数，式(3.129)右端第二项表示抗磁性的影响；$\vec{r}'$ 为超导环 1 上的体积元 $d\tau_1'$ 的位置矢量；$\vec{j}_1(\vec{r}')$ 为体积元 $d\tau_1'$ 处的传导电流密度；$d\tau_2'$ 为超导环 2 上的体积元；$\vec{j}_{12}(\vec{r}')$ 为体积元 $d\tau_2'$ 处的屏蔽电流密度；$\vec{r}$ 为空间一点的位置矢量；λ_1 为超导环 1 材料的穿透深度；μ_0 为真空磁导率。

同理，超导环 2 的自感 L_2 的定义是：

$$L_2 = \frac{\phi_2}{I_2} = \frac{1}{I_2}\oint(\mu_0\lambda_2^2\vec{j}_2 + \vec{A}_2)\cdot\vec{dl}_2 \tag{3.130}$$

其中

$$\vec{A}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int\frac{\vec{j}_2(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau_2' + \int\frac{\vec{j}_{21}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau_1'\right] \tag{3.131}$$

超导环 1 和 2 间的互感 M 的定义为：

$$M = \frac{\phi_{21}}{I_2} = \frac{1}{I_2}\oint(\mu_0\lambda_1^2\vec{j}_{21} + \vec{A}_2)\cdot\vec{dl}_1 \tag{3.132}$$

或

$$M = \frac{\phi_{12}}{I_1} = \frac{1}{I_1}\oint(\mu_0\lambda_2^2\vec{j}_{12} + \vec{A}_1)\cdot\vec{dl}_2 \tag{3.133}$$

式中 ϕ_{21} 是电流 I_2 在超导环 1 中产生的磁通，ϕ_{12} 是电流 I_1 在超导环 2 中产生的磁通。

可以看出，超导环的自感的表示式是由两项组成的。第一项是库柏电子对动能相应的电感 L_d，叫做超导环的动电感，

$$L_d = \frac{1}{I}\oint\mu_0\vec{j}\cdot\vec{dl} \tag{3.134}$$

第二项是电流的磁能相应的电感 L_m，叫做磁电感，

$$L_m = \frac{1}{I}\oint\vec{A}\cdot\vec{dl} \tag{3.135}$$

将右端的线积分化成面积分，得到：

$$L_m = \frac{1}{I}\oint\vec{B}\cdot\vec{dS} \tag{3.136}$$

式中 $\vec{B}$ 为环孔中面积元 dS 处的磁感应强度。所以，超导环电感的大小决定于环的形状、尺寸、材料、其中的电流频率及空间分布、周围的物体及它们的温度等。一般来说，它是不容易精确计算的。但考虑到超导体中的电流和磁场局限在超导体表面下厚度约为穿透深度 λ ($\lambda\approx10^{-6}$ cm)的薄层内，环孔尺寸比 λ 大很多，于是，$L_m \gg L_d$，

$$L \approx L_m = \oint\vec{A}\cdot\vec{dl} = \oint\vec{B}\cdot\vec{dS} \tag{3.137}$$

另外，电流 I 周围空间的磁能和环电感有关：

$$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\int\vec{B}\cdot\vec{H}dv$$

式中 $\vec{B}$ 和 $\vec{H}$ 分别为空间体积元 dv 处的磁感应强度和磁场强度。

利用以上各公式可以计算环电感，至于用那个公式，视具体问题而定。下面给出几种常用 SQUID 探头的电感公式。

一、轮形空腔 RF-SQUID 环电感

具有轮形空腔的点接触结 RF-SQUID 探头结构图已示于图 3.1*d*，具有轮形空腔的混合式 RF-SQUID 探头结构图已示于图 3.1*e*。由于轴对称性，它们的环电感容易计算，计算方法也相同，现以图 3.1*e* 为例计算如下。为简化计算，假定：包括薄膜超导结在内高度为 h_1 的一段是半径为 r_1 的导线，于是，整个结构具有轴对称性。当超导结中有电流时，沿整个圆柱表面和底面的电流分布也有轴对称性。环孔中的磁力线是一些同心圆，同心圆所在平面与对称轴垂直，对称轴上各点即为相应同心圆的圆心，半径相同的同心圆上各点的磁场强度 $\vec{H}$ 的大小相同、方向沿同心圆切线方向。由安培环路定律容易算出半径为 r 的各点的磁场强度：

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

通过高度为 h 的空腔上面积元 hdr 的磁通量 $d\phi$ 为：

$$d\phi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi r} dr$$

对整个空腔积分，可算出整个空腔截面上的磁通量，再利用自感定义，得到环电感 L 为：

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[h_1 \ln\left(1 + \frac{d_1}{r_1}\right) + h_2 \ln\left(1 + \frac{d_2}{r_2}\right) + h_3\left(1 + \frac{d_3}{r_3}\right)\right] \tag{3.138}$$

式中 h_1、h_2、h_3 为各空腔高度，d_1、d_2、d_3 为各空腔宽度，r_2、r_3 为相应空腔外半径。

由式(3.138)可以看出，空腔高度对环电感的影响很大，空腔宽度的影响较小。

将 r_1 理解成点接触结的螺钉半径，则上式即为轮形空腔点接触结 RF-SQUID 环电感公式。

二、单孔和双孔 RF-SQUID 环电感

这两种 RF-SQUID 探头结构图已示于图 3.1*a* 和 3.1*c*。它们的环电感不能严格计算，这是因为单孔和双孔内表面层内的电流密度的空间分布很复杂。为得到近似结果，假定单孔铌柱很长，沿窄缝壁和圆柱孔壁的电流密度处处相同，它们只是在点接触结附近的窄小区域突然汇集在一起流经点接触结。由安培环路定律，窄缝中的磁场强度的大小 $H = 2j$，圆柱孔中的磁场强度大小为 j，j 为单位长度的电流，$\vec{H}$ 的方向沿孔轴线方向。由此容易算出穿过窄缝及圆柱孔的磁通，再按自感定义，得到单孔 RF-SQUID 环电感 L 为：

$$L = \frac{\mu_0}{h}(2ld + \pi R^2) \tag{3.139}$$

式中 l 和 d 为窄缝长度和宽度，R 和 h 为圆柱孔半径和高度。

可以看出，减小 l、d、R，可以减小 L，增加 h 也可以减小 L。但必须指出，h 太大时（>8 mm 左右），再增加 h 并不能减小 L，这是因为实际的电流密度不是均匀的。

式(3.139)的第二项可以作为图 3.1*b* 所示的微桥结 RF-SQUID 环电感公式。

双孔 RF-SQUID 可以等效成两个单孔 RF-SQUID 的并联，忽略其间的互感后，可以近似地认为双孔 RF-SQUID 环电感为相同尺寸的单孔 RF-SQUID 环电感的一半。

三、平面薄膜 RF-SQUID 环电感

图 3.1*f* 已示出由平面薄膜RF-SQUID和双孔铌块耦合而成的混合式RF-SQUID。该平面薄膜 RF-SQUID 环电感可以计算如下。因为平面薄膜 RF-SQUID 中每个圆孔半径比薄膜厚度大很多，可以假定该薄膜中的电流是二维的，同时还可假定该环孔是由两个并联圆孔组成的，于是，我们首先计算一个内半径为 r_1、外半径为 r_2 的圆环电感。为简化计算，进一步假定沿圆环的电流 I 是沿着平均半径 R 的线电流，如图 3.30，

$$R=\frac{r_1+r_2}{2}$$

在点$(r_1,0,0)$的磁矢势$\vec{A}$的方向沿通过该点、半径为 r_1 的圆周的切线方向。$\vec{A}$的大小为：

$$A=\frac{\mu_0 IR}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\alpha d\alpha}{(R^2+r_1^2-2r_1R\cos\alpha)^{1/2}}$$

这个积分可以化成椭圆积分，为此，令

$$\alpha=\pi-2\beta$$

$$k^2=\frac{4r_1R}{(r_1+R)^2} \qquad (3.140)$$

消去 α，得到，

$$A=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{R}{r_1}\right)^{1/2}f(k)$$

式中

$$f(k)=\left(\frac{2}{k}-k\right)G-\frac{2}{k}E$$

$$G=\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\beta)^{-1/2}d\beta$$

$$E=\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\beta)^{1/2}d\beta$$

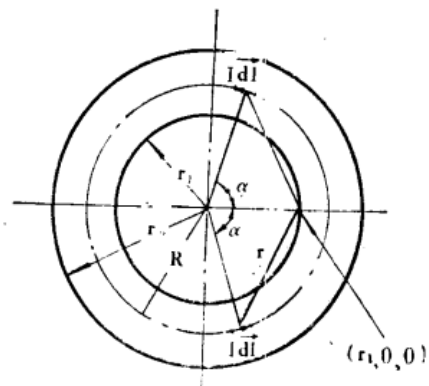


图 3.30 平面圆环

由式(3.135)，该圆环的电感为：

$$L=\mu_0 r_1\left(\frac{R}{r_1}\right)^{1/2}f(k) \qquad (3.141)$$

此式表明，知道平面圆环的内外半径，查椭圆函数表，就可以求得该圆环的电感；反之亦然。

平面薄膜双孔 RF-SQUID 环电感可以用两种方法计算。第一，令圆孔中心到矩形薄膜边缘的最短距离为等效圆环的外半径；第二，使半径为 r_1 的圆孔外侧的超导薄膜面积等于内半径为 r_1 的某一圆环面积，令该圆环外半径为等效圆环外半径，将内外半径的数值代入式(3.141)，可以求出等效圆环的电感。考虑到两个环孔间的互感很小，于是，这个电感除以 2，便是平面薄膜双孔 RF-SQUID 环电感。对于常用的基片尺寸，这两种计算方法的差别不大。

在实际上，人们很难制作临界电流小于 1μA 而其他参数又合适的超导结，于是，为了

满足式(3.95)，平面薄膜双孔 RF-SQUID 环电感必须是 10^{-10} H 的数量级，相应的圆孔半径小于 1 mm。如果选用这样的尺寸，输入信号线圈和谐振线圈的绕制和安装都很困难，它们和 RF-SQUID 环间的耦合很差。由于这个原因，人们将平面薄膜双孔 RF-SQUID 和双孔铌块耦合起来。这种方法能够有效地减小环电感。

§3.8 磁通变换器

在 SQUID 的应用中，被测信号往往是经过超导输入线圈耦合到 SQUID 环中的，如图 3.31。图 3.31*a* 所示是一种简单的超导磁通变换器，它是由超导检测线圈和超导输入线圈组成的全超导回路，被测磁通穿过检测线圈，在超导回路中感应一个超流。这个超流在输入线圈中产生的磁通耦合到 SQUID 环孔中，SQUID 电路的输出信号不再反馈回来；在图 3.31*b* 和 *c* 中，SQUID 电路的输出信号又经谐振线圈或另外的反馈线圈反馈回 SQUID 环孔，这就是前面所讨论的负反馈锁定式线路，SQUID 用来作为零磁通指示器，这种方法叫做零磁通法。图 3.31*c* 的反馈方法主要用在DC-SQUID。在图 3.31*d* 中，SQUID 电路的输出信号反馈到磁通变换器中，使其中的电流为零，这种方法叫做零电流法。

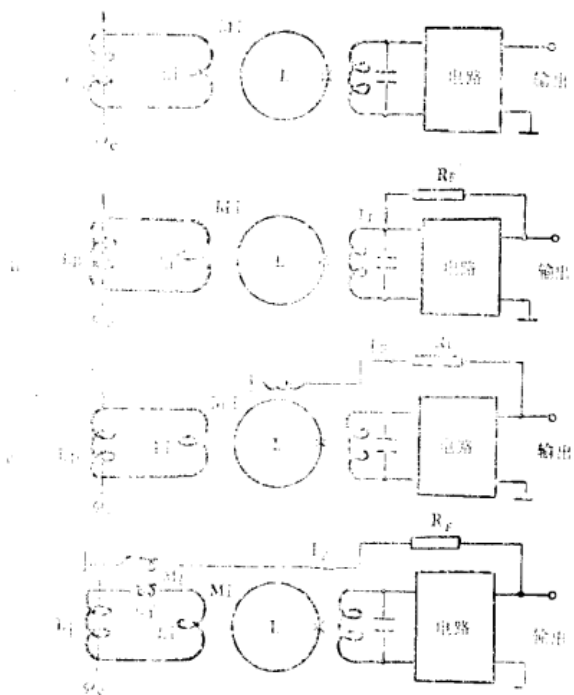


图 3.31 超导磁通变换器和 SQUID 环耦合

如上面已说过的，对于这种由磁通变换器和 SQUID 组成的系统，为了求得能量分辨率，除了 SQUID 本身的磁通噪声外，还必须知道磁通变换器的参量、输入线圈和 SQUID 环的耦合系数、反馈线圈和磁通变换器的耦合参量等。

一、零磁通法

为一般化起见，假定输入线圈和反馈线圈间也存在着电磁耦合，其间的互感系数为 M_{if}，设检测线圈的自感为 L_p，输入线圈的自感为 L_i，输入线圈和 SQUID 环间的互感 M_i 为：

$$M_i = k(LL_i)^{1/2}$$

反馈线圈与 SQUID 环的互感 M_f 为：

$$M_f = k_f(LL_f)^{1/2}$$

磁通变换器和反馈线圈中的电流分别为 $I_i(t)$ 和 $I_F(t)$、负反馈使 SQUID 环孔中的磁通量为常数。

首先讨论 $M_{if}=0$ 的情况，假定检测线圈是一匝线圈。如果检测线圈中的外磁通量变化 $\Delta\phi_e$，那么，磁通变换器中就会感应一个电流 I_i，由磁通守恒定理，它们间的关系为：

$$\Delta\phi_e + (L_i + L_p)I_i = 0$$

或
$$I_i = -\frac{\Delta\phi_e}{L_i + L_p} \tag{3.142}$$

对 SQUID 环孔，

$$M_i I_i + M_f I_F + \phi_N = 0 \tag{3.143}$$

式中 ϕ_N 为SQUID 的等效磁通噪声。由式(3.142)和(3.143)消去 I_i，解出 I_F，

$$I_F = \frac{1}{M_f}\left(\frac{M_i \Delta\phi_e}{L_i + L_p} - \phi_N\right) \tag{3.144}$$

$I_F = 0$ 对应的 $\Delta\phi_e$ 为检测线圈能够检测的最小磁通。此最小可检测磁通 $\Delta\phi_{ep}$ 为：

$$\Delta\phi_{ep} = \frac{L_i + L_p}{M_i}\phi_N = \frac{L_i + L_p}{k(LiL)^{1/2}}\phi_N \tag{3.145}$$

由此式可以得到：当

$$L_p = L_i \tag{3.146}$$

时，$\Delta\phi_{ep}$ 取极小值：

$$\Delta\phi_{ep\,min} = \frac{2}{k}\left(\frac{L_p}{L}\right)^{1/2}\phi_N \tag{3.147}$$

如果检测线圈的匝数是 N_p，并且是密绕的，则 $\Delta\phi_{epmin}$ 减小 N_p 倍。

再来讨论 $M_{if} \neq 0$ 的情况。一匝检测线圈中的外磁通变化 $\Delta\phi_e$ 时，磁通变换器中的感应电流 I_i 和 $\Delta\phi_e$ 的关系为：

$$\Delta\phi_e + (L_i + L_p)I_i + M_{if}I_F = 0 \tag{3.148}$$

SQUID 环孔中的磁通仍由式(3.143)表示。将式(3.148)和(3.143)联立消去 I_F，得到，

$$I_i = \frac{\left(\frac{M_{if}}{M_f}\right)\phi_N - \Delta\phi_e}{L_p + L_i\left(1 - \frac{M_{if}M_i}{M_f L_i}\right)} \tag{3.149}$$

由此式可以看出M_{if} 的作用：第一，SQUID的一部分磁通噪声耦合到磁通变换器中；第二，输入线圈的自感减小为 L_i'，

$$L_i' = L_i\left(1 - \frac{M_{if}M_i}{M_f L_i}\right) \tag{3.150}$$

将式(3.148)和(3.143)联立消去 I_i，得到，

$$I_F = \frac{\frac{M_i}{L_p + L_i}\Delta\phi_e - \phi_N}{M_f\left[1 - \frac{M_{if}M_i}{(L_p + L_i)M_f}\right]} \tag{3.151}$$

由此式可知M_{if} 的第三个作用是：使得M_f 减小成为M_f'，

$$M_f' = M_f\left[1 - \frac{M_{if}M_i}{(L_p + L_i)M_f}\right] \tag{3.152}$$

在 $L_p = 0$ 的极限情况下，

$$\frac{M_f'}{M_f} = \frac{L_i'}{L_i} \tag{3.153}$$

由式(3.151)还可以看出，最小可检测磁通仍由式(3.145)表示，即与M_{if} 无关。它取极小值

的条件及极小值的表示式仍由式(3.146)和(3.147)表示。

需要指出的是，式(3.146)和(3.147)具有近似性。这是因为磁通变换器和 SQUID 环之间存在着耦合，使得环电感由 L 减小成为 L'，

$$L' = L - \frac{M_i^2}{L_i + L_p} = L\left(1 - \frac{k^2 L_i}{L_i + L_p}\right) \tag{3.154}$$

于是，SQUID 和磁通变换器组合系统的磁通噪声比孤立 SQUID 的磁通噪声要小。假定 SQUID 的固有磁通噪声比放大器和谐振线路的等效磁通噪声小很多，则最小可检测磁通取极小值的条件成为：

$$L_p = L_i(1 - k^2) \tag{3.155}$$

对于线绕输入线圈，k 较小，L_i 减得并不多，最小可检测磁通取极小值的条件可以近似地用式(3.146)表示。

二、零电流法

图 3.31*d* 为零电流法工作的磁通变换器。反馈线圈和线圈 L_f 耦合，反馈电流在线圈 L_f 中产生的磁通恰好抵消检测线圈中的外磁通变化，使磁通变换器中的感应电流为零，耦合到 SQUID 环孔中的磁通也为零。

若检测线圈中的外磁通变化 $\Delta\phi_e$，由磁通守恒可知，磁通变换器感生电流 I_i 和反馈线圈感生电流 I_F 满足下式，

$$\Delta\phi_e + (L_p + L_i + L_f)I_i + M_f I_F = 0 \tag{3.156}$$

耦合到 SQUID 环孔中的磁通量 $M_i I_i$ 和反馈电流 I_F 的关系为：

$$I_F = \left(-\frac{dI_F}{d\phi_e}\right)(M_i I_i + \phi_N) \tag{3.157}$$

式中 $-\frac{dI_F}{d\phi_e}$ 为反馈电流对 SQUID环孔中的外磁通的传递函数。式(3.156)和(3.157)联立，解出 I_F，

$$I_F = \left(-\frac{dI_F}{d\phi_e}\right)\left(\frac{M_i}{L_p + L_i + L_f}\Delta\phi_e - \phi_N\right)(1 + G)^{-1} \tag{3.158}$$

式中

$$G = \left(\frac{dI_F}{d\phi_e}\right)\frac{M_i M_f}{L_p + L_i + L_f}$$

可以看出，最小可检测磁通为：

$$\Delta\phi_{ep} = \frac{L_p + L_i + L_f}{M_i}\phi_N \tag{3.159}$$

将式(3.159)和(3.154)相比较，即可看出，线圈 L_f 的作用相当于零磁通法中的杂散自感，使 $\Delta\phi_{ep}$ 增加，因此，应当使用小的 L_f。由式(3.159)容易得到 $\Delta\phi_{ep}$ 取极小值的条件及 $\Delta\phi_{ep}$ 的极小值的表示式。它们可用式(3.146)和(3.147)表示，只需将其中的 L_p 代之以($L_p + L_f$)。

最后，需要指出的是，由于 M_i 和 L_i 的严格值取决于屏蔽电流的分布，屏蔽电流分布很复杂，使得 $M_i L_i^{-1/2}$ 的精确值不易计算。因此，$M_i L_i^{-1/2}$ 的最佳值要用实验方法确定。文献[23]中给出了一些实测结果。

§3.9 RF-SQUID性能参数的测量

RF-SQUID的主要参数是：SQUID环电感L、$\beta=2\pi LI_c/\phi_0$、SQUID环和输入线圈间的互感M_i、SQUID环和谐振线圈间的互感M、RF-SQUID闭环运行时的小信号参数即(输入电感、正向传递函数、反向传递函数、输出电阻)。RF-SQUID的主要技术指标是磁通噪声、能量分辨率、漂移、摆率等。

测量正向传递函数即输出电压对输入磁通变化率$\frac{\partial V}{\partial \phi_e}$的方法是：首先调出三角波，记下某一峰值在示波器上的位置。然后往谐振线圈中注入直流电流。当直流电流单调增加时，三角波沿水平方向移动。移动一个周期表示SQUID环孔中的磁通量变化$1\phi_0$，记下相应的电流值。将数字电压表接在SQUID电路输出端，记下电压表的示值，再将注入电流逐渐减小到零，记下电压表的示值。两次示值的差即正向传递函数。

测量输出电压对输入线圈电流I_i的变化率的原理是：往输入线圈中注入已知电流，用数字电压表测量输出电压变化。该电压变化量和电流之比就是待求的输出电压对输入线圈的电流的变化率。利用示波器观察方法也可以定出输入磁通变化$1\phi_0$所相应的输入电流。输入电流和输出电压的关系是典型的三角波，周期为M_i/ϕ_0，测出这个周期，便可以定出输入线圈和SQUID环间的互感M_i。

利用交流电桥可测出输入线圈的自感L_i。需要注意的是，输入线圈置于SQUID环孔中的自感小于输入线圈单独存在时的自感，SQUID工作时和断开时的测量结果也不同。

由测得的M_i和L_i可以算出k^2L，$k^2L=M_i^2/L_i$。

测量β的方法是[24]：把示波器打到直流挡，然后使射频电流从零开始逐渐增加，记下第1个三角波消失第2个三角波刚要出现时的电压值或示波器的格数A。继续增加射频电流，记下第2个三角波刚要消失第3个三角波刚要出现的电压值或示波器的格数B，则$\beta=A/B$。

测量磁通噪声的方法是：首先确定输入磁通变化$1\phi_0$时所相应的输入电流I_0，然后进行磁通锁定，并在输入线圈中注入一个已知电流I_i，用函数记录仪测量输出电压V_S和磁通噪声电压峰峰值V_{NPP}，按下式计算磁通噪声频谱密度S_ϕ，

$$S_\phi^{1/2}=\frac{V_{Neff}}{\sqrt{\Delta f}}\cdot\frac{I_i}{V_S I_0} \tag{3.163}$$

式中Δf为SQUID系统带宽，V_{Neff}为方均根磁通噪声电压，$V_{Neff}=V_{Npp}/5$

由测得的S_ϕ和k^2L，可以算出能量分辨率ε，$\varepsilon=\frac{S_\phi}{2k^2L}$。

测量漂移的方法是：首先确定输出电压对输入磁通的变化率或函数记录仪纸带上一格相应的输入磁通ϕ_S。然后将输入线圈短路，进行磁通锁定，持续记录8～24小时。若SQUID探头和电路的漂移小，则记录曲线是迭加着噪声的水平直线。若漂移大，记录曲线则是迭加着噪声的斜线或起伏变化的曲线。量出该斜线或起伏变化曲线相对于水平基线的最大偏离格数ΔS，漂移$=\Delta S\cdot\phi_S$。

测量摆率的方法是：首先测出输出电压对输入磁通的变化率$\frac{\partial V}{\partial \phi_e}$。将SQUID进行磁通锁定，然后往输入线圈中注入正弦波扫场信号，并使磁通锁定后的电压保持定值V_0。逐渐

增加扫场信号频率，直到系统失锁，记下刚失锁时的频率 f_0。摆率 S 为：

$$S=\frac{2\pi f_0 V_0}{\frac{\partial V}{\partial \phi_e}} \tag{3.146}$$

文献[25]中报导了轮形点接触结 RF-SQUID 性能参数的测量电路和测量结果。

§3.10 实用电路[26]简介

如今，RF-SQUID 已经商品化了。美国 S·H·E 公司的产品较好。下面简介该公司的 330 型电路。它由 300 型探头和 30 型控制单元组成，输出信号正比于 SQUID 环孔中交连的外磁通。探头和控制单元间的电缆可以长到 100 米。

一、300 型探头

如图 3.32。它的第一个作用是：用射频电流激励 RF-SQUID 环，再将产生的信号放大、检波。射频振荡器输出19±0.5MHz 正弦电流给可变调制器。该调制器输出信号正比于

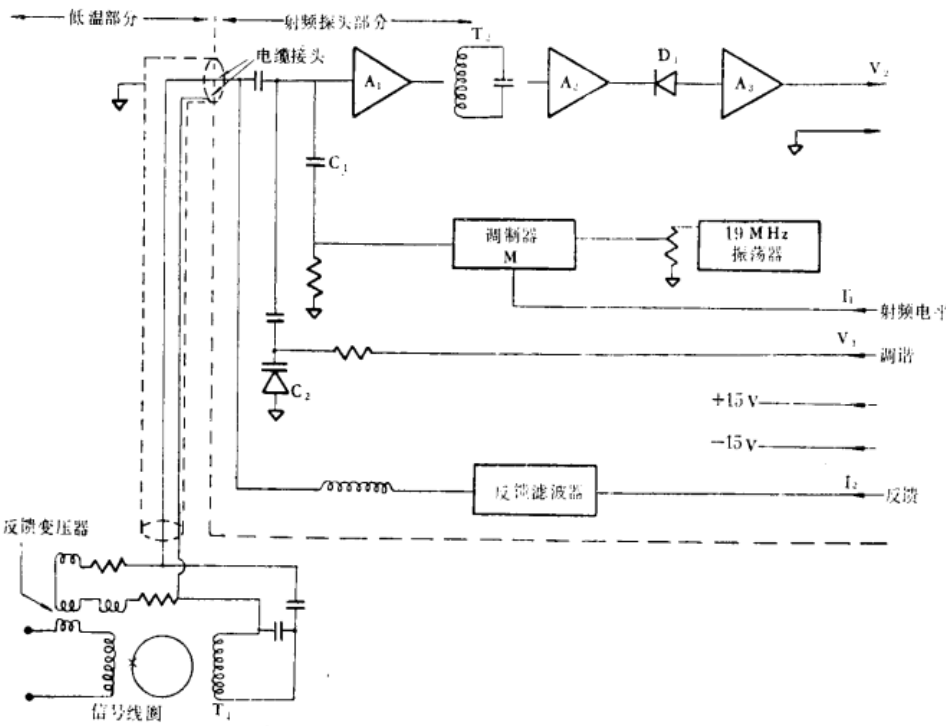


图 3.32 300 型探头的方框图

I_1(I_1 由控制单元提供，变化范围是 0～300μA)。衰减后的正弦电流经小电容 c_1 输给谐振线路。调整控制单元的调谐电位器输出电压，借以改变容二极管 c_2 的电容，可将谐振线路的谐振频率调成 19MHz。当 19MHz 的信号电平合适时(一般为30～300μV)，谐振线圈两端的射频信号被 SQUID 环孔中的磁通调幅，调制周期为 $1\phi_0$，调制深度约为 10μV。此调幅

波经高阻抗低噪声放大器 A_1（A_1 为场效应管串级放大器，19MHz 信号噪声约为 $\frac{2\ \mathrm{nV}}{\mathrm{Hz}^{1/2}}$）、谐振器 T_2（Q 值均为 25）、放大器 A_2，输给射频检波器 D_1。D_1 的输出信号是射频信号的包络即音频信号。此音频信号再由电压跟随器 A_3 变成电压 V_2，经电缆输给控制单元。整个放大器的电压增益为 83 分贝，放大器的上升时间由 T_2 的 Q 值及时间常数决定，约为 1μS。

探头的第二个作用是：将音频反馈调制电流 I_2 经反馈滤波器输给谐振线圈。反馈滤波器只许直流反馈信号及音频调制信号通过，其中的 $R-C$ 低通滤波器对 800Hz以上信号的衰减为 $\frac{20\text{分贝}}{\text{十倍频程}}$，$LCR$ 滤波器对 1MHz 以上信号的衰减为 $\frac{40\text{分贝}}{\text{十倍频程}}$。

V_2 和 I_2 的关系即 RF-SQUID 输出的射频信号幅度和 SQUID 环孔中的准静态外磁通关系是三角波。三角波的斜率即正向传递函数为：

$$\frac{\partial V_2}{\partial \phi_e} = \pm \frac{2V_\Delta}{\phi_0}$$

式中 V_Δ 是 V_2 的峰峰值，均为 0.1V。V_2 对 I_2 的变化率为：

$$\frac{\partial V_2}{\partial I_2} = \frac{2V_\Delta M}{\phi_0}$$

式中M为谐振线圈和 SQUID 环间的互感。美国 S·H·E 公司的轮形点接触结RF-SQUID的M为 2.1×10^{-9}H，SQUID 环孔中的磁通变化 $1\phi_0$ 所需要的反馈电流 I_2 为 1μA。

二、控制单元

控制单元的主要功用是：使整个电路成为闭合反馈环路，输出一个跟输入磁通成线性关系的模拟电压。它由反馈环路、输出滤波器、复位电路、监测电路等组成。

1. 反馈环路

如图 3.33 所示。探头输出信号分成两路。一路到监测器插座，监测RF-SQUID的工作及干扰信号。另一路信号经增益调节电位器 P_1、音频放大器 A_4（增益为15）、射频滤波器L、差分放大器 A_5（增益为 5）输给相敏解调器。此解调器的参考信号由 100KHz方波振荡信号经

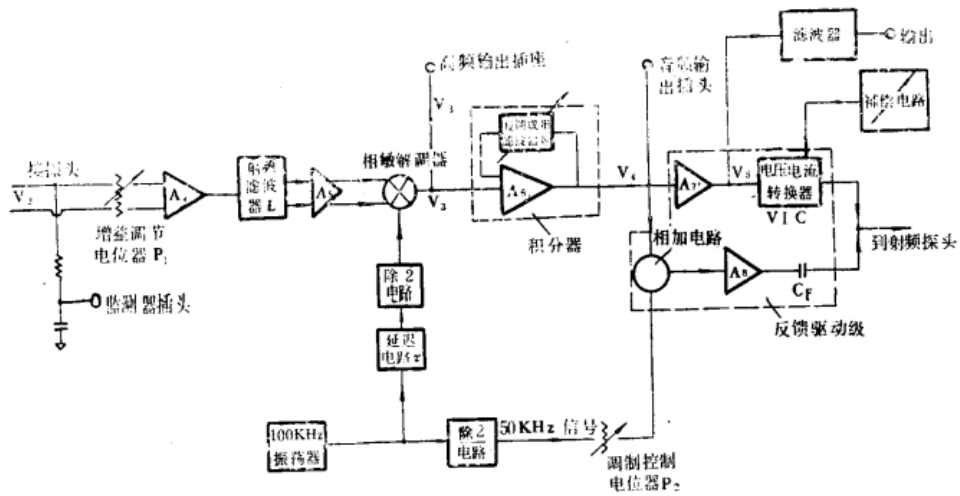


图 3.33　反馈环路的方框图

延迟电路 τ、除 2 电路而得到。延迟时间可在 1.5～5μS范围内调节，用作相移电路，使输给相敏解调器的二路 50KHz 信号有合适的位相差。相敏解调器的输出信号 $V_3(t)$正比于$\Delta\phi$，$\Delta\phi$ 为 SQUID 环孔中的磁通相对于锁定点的变化量。增益调节电位器 P_1 要调节到使输出电压对输入磁通的变化率为 $4.0V/\phi_0$。

相敏解调器的输出信号一路经 210KHz 低通滤波器到高频输出插座。另一路到积分器。积分器的时间常数、反馈成形滤波器 F_2 的频率响应和增益可调，使摆率和抗干扰能力取良好的折衷。

反馈成形电路的输出信号 V_4 又输给由直流放大器 A_7、交流放大器 A_8 及电压电流转换器 VIC 组成的反馈驱动级。将 50KHz 的调制方波和 F_2 的输出信号相加，输出一个反馈、调制信号到探头中去。反馈驱动级有交直流二个通道：交流信号通道由相加电路、放大器 A_8 及反馈电容 C_F 组成。反馈信号的直流分量由电压电流转换器产生。电压电流转换器的功用是：将放大器 A_7 的输出电压 V_5 转变成电流 V_5/R_F，R_F 为该电路的等效反馈电阻。

放大器 A_7 的输出电压 V_5 为该系统的输出电压，V_5 正比于直流反馈电流。为使该系统的正向传递函数为 $2V/\phi_0$、$0.2V/\phi_0$、$0.02V/\phi_0$，反馈电阻 R_F 要转换成 2MΩ、200KΩ、20KΩ。为使反馈驱动级的直流通路和交流通路的正向增益相同，直流放大器 A_7 的增益 G_7 要跟着改变，R_F 和 G_7 的关系是 $R_F/G_7=2\times10^4\Omega$。

使用电压电流转换器的好处是：对于任一给定的反馈电流，输出电压 V_5 跟反馈电路中的电动势无关，能消除长电缆反馈电路中的杂散电动势影响；能消除几台仪器共用一根地线所产生的相互干扰。

直流放大器 A_7 的输出电压 V_5 还经滤波器加到输出插孔上。输出滤波器的第一级由无源双 T 陷波器及低漂移电压跟随器组成，第二级是双极有源低通滤波器(它的截止频率可调，阻带衰减为$\frac{40\text{分贝}}{\text{十倍频程}}$，有效噪声带宽可调，最后一级是双极无源低通滤波器（它的截止频率为 25KHz，用来抑制阻带噪声)。这个信号通道的输出阻抗为 200±20Ω，输出电流为 1mA。

补偿电路用来向谐振线圈注入 0～2μA 的直流电，该电流可在 SQUID 环孔中产生 0～$2\phi_0$ 的磁通。当补偿电路和复位电路连用时，输出信号就可以在大范围内连续变化。补偿电路通常用来将输出电压调到零。

2. 复位电路(图 3.34)

如前所述，RF-SQUID 的响应是一个多值函数。对于某一外磁通，当反馈环路瞬时打开又闭合时，输出电压可能移到一个新的值。复位电路的功用是：使输出电压回复到原选定电压。电子开关 S_1 和 S_2 表示相敏解调器。正常工作期间，它们以 50KHz 的频率使放大器 A_6 的输出信号交替地倒向和不倒向。倒向和不倒向信号输给积分器。在复位期间，开关 S_1 和 S_2 被复位逻辑电路的信号扳断，开关 S_3 和 S_4 也被扳断，从反馈成形滤波电路 F_2 输出端，经放大器 A_9，到积分器输入端的负反馈支路接通，反馈环路使 A_9 输入端电压 V_4' 为零，积分器无输入信号因而它的输出信号也为零。为此，要调节复位控制电位器 P_3。

复位作用完结时，S_3 和 S_4 闭合，S_1 和 S_2 又交替工作，反馈环路迅速地锁在最邻近予调值 V_4' 的稳定值 V_4 上。复位环路的输出电压 V_4 经反馈驱动级成为 V_5。

电压 V_5 经鉴别控制电位器 P_4 输给窗鉴别器。后者的输入电压超过±1.0 V 时，触发单

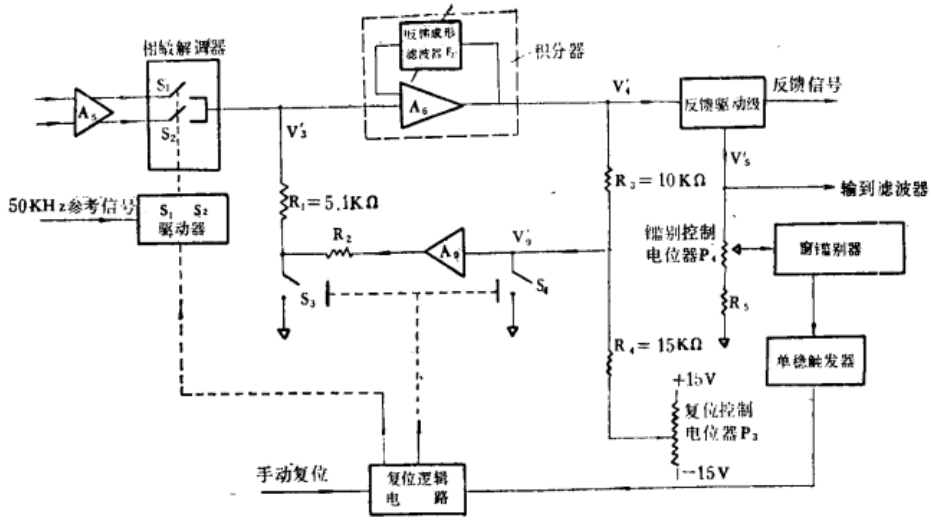


图 3.34　复位电路的方框图

稳态触发器。单稳态触发器又推动复位逻辑电路。单稳态触发器的时间常数为 80mS，足以使复位环路进入平衡态。

3.　控制和监测电路(图 3.35)

它可调节射频电平，调谐、调节增益和调制信号幅度。

左下角的电路是射频电平控制电位器 P_5 及电压电流转换器。该转换器输出端和探头中的调制器相连，输出电流和 P_5 滑动端位置成正比。它使二极管正向电压特性随温度变化不影响二极管调制器。

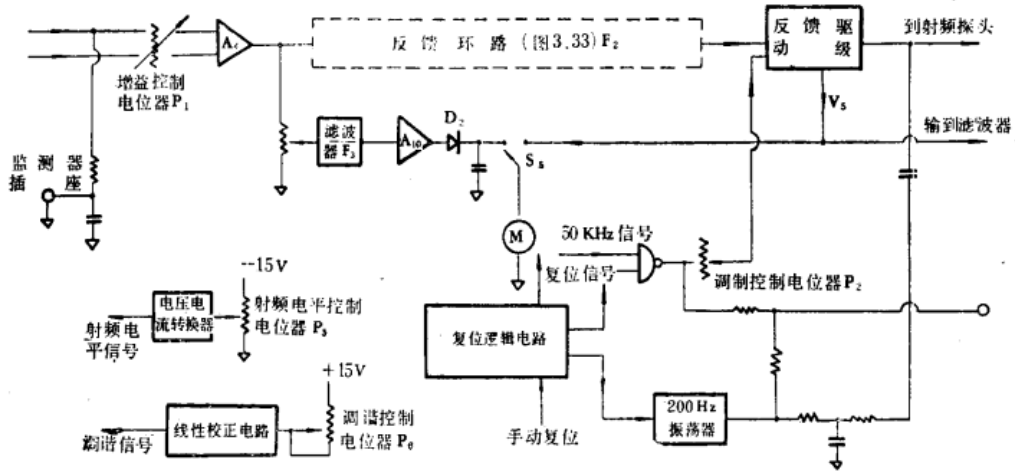


图 3.35　控制和监测电路方框图

调谐电路的变容二极管上的控制电压由调谐控制电位器 P_6 上的电压经线性校正电路得到。

左下角以外的电路是监测和调节电路的方框图。它有二个工作模式，第一个工作模式用来调节射频电平、开环增益及调谐，第二个工作模式用来调节调制信号，使 50KHz 音频调制方波高度相应的磁通为 $\phi_0/2$。

在第一个工作模式，复位逻辑电路的信号使200Hz 振荡器接通。该振荡器输出的方波经滤波后成为峰峰值为 10μA 的正弦电流，经反馈电缆输给探头，在 SQUID 环孔中产生10ϕ_0的磁通。此时，反馈环路不被复位信号触发，50KHz 的调制信号被抑制，但19MHz的射频信号可以注入。探头的输出信号经放大器 A_4、滤波器 F_3（通带为 300Hz～10MHz）、放大器 A_{10}，输给峰峰检波器 D_2，D_2 的输出端和电流计 M 相连。

调节过程如下：将射频电平、增益调到最大。当探头温度高于液氦温度时，由于射频放大器输入端的噪声，M 有少许偏转。调节调谐控制电位器 P_8，使这个偏转最大。如果是这样的，则表明电路能够调谐。将探头浸入液氦，使它的温度为液氦温度，调节射频电平控制电位器 P_5 直到 M 给出可观察的偏转，然后再调节 P_8 使 M 的偏转最大，这进一步表明电路可以调谐。如果调节 P_8 时，M 示值超过满量程的 25%，则应当减小射频电平，再调谐，直到在尽可能低的射频电平时还能调谐。

调谐后，把示波器接到监测插座上，可以观察 200Hz 试验信号产生的三角波。如果把射频电平调到零，然后再单调增加，则会出现三角波交替显现和消失的现象，M 也作周期性摆动，这是因为 SQUID 环依次偏置在 I_{rf}—V_{rf} 特性曲线第一、二、三、…个台阶上的缘故。通常，射频电平选在 M 的示值为第一极大值处即第一个台阶上，这时信噪比较高，射频电路的漂移的影响较小。但有时也选在其他台阶上，因为这时的摆率较大。

增益要调节到使得 M 的偏转为满量程的 50%。

在第二个工作模式，50KHz 的方波调制信号和 200Hz 的试验信号一起输给谐振线圈，M 仍然接在 D_2 输出端，反馈环路仍不工作。调节调制控制电位器 P_2，使 SQUID 环中的调制磁通峰峰值等于 $\phi_0/2$。这时 200Hz 试验信号被差频到 50KHz 中频载波的边带内。这些频率位于 F_3 的通带外，当调制磁通峰峰值为 $\phi_0/2$ 时，M 的示值为零。

330 型电路的主要性能指标是：方均根磁通噪声为 $2\times10^{-4}\phi_0/Hz^{1/2}$，摆率为 3×10^4～$3\times10^5\phi_0/S$，零漂为 $\pm2\times10^{-4}\phi_0/hr$。

§3.11 超高频、微波及其他射频 SQUID

一、超高频 SQUID 和微波 SQUID

前已指出，提高射频偏置频率可以提高磁通灵敏度，还可增加带宽。例如偏置频率为 2～30MHz 时，磁通灵敏度为 $2\times10^{-5}\phi_0/Hz^{1/2}$，带宽为 100KHz。偏置频率为 400MHz～10GHz 时，磁通灵敏度可达 $3\times10^{-5}\phi_0/Hz^{1/2}$，带宽可达 5MHz～5GHz。鉴于此，人们设计了偏置频率为 400MHz～10GHz 的 SQUID。

R.J Prance 等人研制的超高频 SQUID 已接近商品[27]。偏置电流频率为 432MHz，采用了液氦冷却的 *GaAs* FET 前级放大器。谐振线路的调谐、谐振线路和 FET 前级放大器间的匹配是通过调节液氦中的变容二极管的电容来实现的。FET 前级放大器和双孔点接触结 SQUID 装在充有 1 个大气压氦气的密闭屏蔽筒内，SQUID 的冷热循环性能较好，*GaAs* FET放大器的寿命较长。屏蔽筒上有三个密封电缆接头，分别用来注入432MHz和5～10MHz的射频信号及反馈信号和引出射频输出信号。432 MHz 信号电缆接头的终端是一个50Ω的微带电阻。该电阻装在屏蔽罩内，屏蔽罩上有一个小孔，一个探针穿入小孔，将 432MHz 信

号引到屏蔽罩外，靠电容的作用，与谐振线圈耦合。

该系统的主要参数和性能指标如下：L 为 5×10^{-10}H(孔径为2.7mm)，I_c 为5μA，$2\pi LI_c/\phi_0\approx5$，R 约为10Ω，L_1 为 10^{-5}H(200匝，单层密绕)，M_1 为 4×10^{-8}H，磁通噪声为 $1\times10^{-5}\phi_0/\mathrm{Hz}^{1/2}$，能量分辨率为 1.3×10^{-30}J/Hz，固有能量分辨率为 4.5×10^{-31}J/Hz，摆率为 $3\times10^6\phi_0$/S，有效带宽为0～5MHz。磁通噪声和能量分辨率可以进一步改善为 $4\times10^{-6}\phi_0/\mathrm{Hz}^{1/2}$ 和 2.1×10^{-31}J/Hz。

关于该系统的机械设计和电路可参阅文献[28，29]。

微波SQUID探头的结构如下[30]：在超导材料制成的矩形波导管上旋入一个点接触结使之形成SQUID环。一根同轴电缆从波导管穿过。同轴电缆和点接触结距波导管端面的距离相等，均为 $\lambda_g/2$，λ_g 为微波在波导管中的波长。射频调制信号沿同轴电缆输给SQUID环。微波信号衰减80分贝后，沿波导管输给SQUID环。反射后的被调制微波信号(功率小于 10^{-9}W)，经低噪声、高增益行波管微波放大器(噪声指数10分贝，小信号增益47分贝，带宽8—12GHz)放大、二极管检波，以后的电路程式与RF-SQUID相同。

使用点接触结的缺点是冷热循环性能较差，每作一次实验，便需调整一次，直到得到合适的结参数。为解决这个问题，可以将点接触结换成微桥结[31]。

与射频SQUID相比，微波SQUID的优点是磁通灵敏度高、频带宽。缺点是信号频率大于10KHz时才具有较高的灵敏度；所用的波导管、微波放大器较贵；SQUID环和输入线圈的耦合较差。微波SQUID主要用来测量射频功率，射频衰减及制作模数转换器。

二、两个射频信号偏置的SQUID[32]

如前所述，为使RF-SQUID较好的工作，L 和 I_c 应当满足条件：

$$\frac{LI_c}{\phi_0}\approx1$$

L 愈小，磁通灵敏度愈高。为此，合用的 L 为 10^{-9}～10^{-10} H量级，I_c 为μA量级。

这样的超导结是很难制造的。即使得到这样大小的 I_c，但因 I_c 是温度的函数，不能在较宽的温度范围内工作。为此，人们发明了用两个频率的射频信号偏置SQUID环的系统，它可以在 $LI_c/\phi_0\gg1$ 的情况下工作。

它与通常RF-SQUID的主要区别在于它有两个频率 f_1 和 f_2 射频偏置电流。通常 $f_2=nf_1$ 或 $f_2=f_1/n$，n 为正整数。谐振线路的谐振频率调到 f_1，因此，仅 f_1 信号得以放大、检波。所用SQUID环为双孔点接触结型，孔径3 mm。临界电流被调到使得 $LI_c/\phi_0=100$，这显然不能满足通常RF-SQUID的工作条件。但若同时有频率为 f_2 的信号，这两个信号在SQUID环孔中产生的磁通幅值合适时，则可以用作磁通检测器。

$LI_c/\phi_0\gg1$ 时，发生量子态跃迁的临界磁通 $\phi_{ec}\approx LI_c$。为简单起见，假定 $LI_c=\phi_{ec}=4.5\phi_0$，频率 f_2 的电流在SQUID环孔中产生的磁通幅值 ϕ_2 比 LI_c 小 $\phi_0/2$左右，频率 f_1 的电流在SQUID环孔中产生的磁通幅值 ϕ_1 小于 $\phi_0/2$，$(\phi_1+\phi_2)$稍小于该SUQID环的临界磁通，例如 $\phi_1=0.3\phi_0$，$\phi_2=4.0\phi_0$，$\phi_1+\phi_2=4.3\phi_0$，因而不会导致量子态跃迁。如果SQUID环中还有外加静磁通 $\phi_e=0.5\phi_0$，则 $(\phi_1+\phi_2+\phi_e)>\phi_{ec}$，要发生量子态跃迁。假定为单磁通量子跃迁，则SQUID输出一列电压脉冲 $e(t)$，脉冲频率为 f_1。这列周期性脉冲是由许多频率的正弦波组成的，其中基波频率为 f_1。此基波信号被放大、射频检波及相

敏检波。可以看出，磁通 ϕ_2 的作用是激励 SQUID 环，磁通 ϕ_1 起着 SQUID 响应信号的载波的作用。

关于该 SQUID 的实验结果可参阅文献[32]。

三、电阻滤波的RF-SQUID

在 RF-SQUID 探头的设计中，人们总是需要小的环电感，这是因为环电感 L 和超导结的临界电流 I_c 要满足关系：$LI_c/\phi_0 \approx 1$，L 小时，I_c 可以大些，从而易于制造；更主要的是，L 小时，磁通灵敏度高。减小 SQUID 环孔尺寸可以减小 L，但减小到一定尺寸时，SQUID 环和输入线圈间的耦合系数也会跟着减小，能量分辨率非但不能改善，反而变得更坏。为了减小 L 而耦合系数不变，人们采用了以下方法：1.使用分数匝SQUID[33]。这种探头的缺点是结构复杂，加工困难；2.将超导细丝插入圆柱形薄膜 RF-SQUID 的环孔中[34]。利用这种方法可使环电感减小几倍，SQUID 的输出信号幅度可以增加一倍。它的缺点是直流磁场灵敏度较低。将紫铜丝插入环孔中，也能减小 L，增加SQUID 输出信号幅度，但要引入磁通噪声，这个噪声是由环流噪声产生的；3.在双孔 RF-SQUID 的一个孔内插入一个薄壁黄铜管(壁厚为射频信号趋肤深度的几倍)[35]，可使射频自感减小 50%。该黄铜管起着低通滤波器的作用，因此，低频自感不变，低频信号和 SQUID 环的耦合不变，对静磁场或低频磁场的灵敏度几乎不变；4.输入线圈的骨架用铁磁性材料[36]可以增加耦合系数，而射频自感增加得不多；5.利用小电阻滤波[37]。这种含滤波电阻的 RF-SQUID 的优点在于：由于有效射频环电感减小，利用临界电流较大的超导结也能满足 RF-SQUID 的最佳工作条件：$LI_c/\phi_0 \approx 1$。这样的超导结易于制造，温度稳定性较好；输入端和输出端的射频干扰较小；由于有效环电感较小，输出信号较大；容易与自感 L_i 大的输入线圈达到最佳匹配。

四、非回滞模式的 RF-SQUID

按非回滞模式工作的RF-SQUID，和前述的按回滞模式工作的RF-SQUID 的探头结构、电路相同，区别在于：前一种模式中，$\beta = 2\pi LI_c/\phi_0 > 1$，SQUID 环中的电流是外磁通的多值函数，不能求出解析解；在后一种模式中，$\beta = 2\pi LI_c/\phi_0 < 1$，SQUID 环中的电流是外磁通的单值函数，可以得到解析解。

按非回滞模式工作的 RF-SQUID 可作磁通传感器，它的超导结可以看成一个参量电感 L_j，

$$L_j = \frac{\phi_0}{2\pi I_c \cos\theta}$$

假定超导结的电流位相关系是正弦式的。RF-SQUID 环的总电感 L' 为：

$$L' = L + L_j$$

θ 和 SQUID 环中的全磁通 ϕ 的关系式为：

$$\theta = \frac{2\pi\phi}{\phi_0} + 2\pi n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

外磁通 ϕ_e 是全磁通的一个组成部分。ϕ_e 变化时，引起 ϕ 的变化，ϕ 的变化又引起 θ 的变化，θ 的变化再引起 L_j 和 L' 的变化，从而引起谐振线路谐振频率的变化，谐振线路两端电压跟着 ϕ_e 变化。

关于按非回滞模式工作的 RF-SQUID 的理论分析和实验结果可参阅文献[38，39]。

按非回滞模式工作的 RF-SQUID 的固有磁通噪声比回滞模式的要小，但因它的环电感较小，输出信号较小，需要高增益窄带放大器，难以制作，使得应用受到一定限制，它多用于研究超导结的电流位相关系、*RSJ* 模型的适用范围以及用作热噪声电流偏置的 RF-SQUID。

五、热噪声电流偏置的 RF-SQUID [40]

通常的 RF-SQUID 是用射频电流来激励 SQUID 环的。当它工作在非回滞模式时，该射频信号源可以省去，而且谐振电路中电阻的热噪声电流，经过 L_TC_T 串联谐振电路选频后，再通过互感 M 去激励 SQUID 环。

与通常的按回滞模式工作的 RF-SQUID 相比，热噪声电流偏置的优点是：没有射频电源，因而电路简单、易于制作、成本较低；没有调节射频电平的手续，因而操作简便；磁通噪声较低，约低几十倍。缺点是：超导结的制造、调整较困难；需要用增益高、带宽窄、噪声小的射频放大器；摆率小。

参 考 文 献

[1] J.E.Zimmerman et al., *J. Appl. Phys.*, 41, 1572(1970)

[2] J.E.Mercereau, *Rev. Phys. Appl.*, 5, 13(1970)

[3] M.Nisenoff, *Rev. Phys. Appl.*, 5, 21(1970)

[4] R.P.Giffard et al., *J. Low Temp. Phys.*, 6, 533(1972)

[5] N.V.Zavaritskii et al., *Cryogenics*, 14, 42(1974)

[6] W.L.Goodman et al., *Proc. IEEE*, 61, 20(1973)

[7] R.Rifkin et al., *Phys. Rev.*, B13, 3894(1976)

[9] 王其俊，低温物理，6，191(1984)

[9] C.T.Wu et al., *J. Appl. Phys.*, 49, 316(1978)

[10] J.E.Zimmerman, *J. Appl. Phys.*, 42, 4483(1971)

[11] J.E.Zimmerman, *Cryogenics*, 12, 19(1972)

[12] G.J.Ehnholm et al., 《*proc. of the fourteenth intern. conf. on low temp. phys.*》 Otaniemi, Finland, Aug. 14-20, 1975, Vol. 4, p.234

[13] 王其俊等，低温物理，7，264(1985)

[14] Wang Qijun, *Chinese Physics*, 6, 1011(1986)

[15] 王其俊等，低温与超导，3期，14(1986)

[16] 王其俊等，低温与超导，1期，19(1987)

[17] J.Kurkijarni, *Phys. Rev.*, 136, 832(1972)

[18] L.D.Jackel et al., *J. Low Temp. Phys.*, 19, 201(1975)

[19] H.Ahola et al., *J. Low Temp. Phys.*, 35, 313(1979)

[20] J.N.Hollenhorst et al., *IEEE Trans.*, Mag-15, 474(1979)

[21] D.Brunet-Brunol et al., *J. Appl. Phys.*, 50, 521(1979)

[22] A.R.Sass et al., *J. Appl. Phys.*, 39, 1956(1968)

[23] J.H.Claassen, *J. Appl. Phys.*, 46, 2268(1975)

[24] 乔蔚川等，第二届全国超导隧道效应学术会议资料(1982)

[25] R.P.Giffard et al., *Appl. Phys. Lett.*, 32, 767(1978)

[26] S.H.E.Corporation, System 330 operating manual.
[27] R.J.Prance et al., *Cryogenics*, 21, 501(1981)
[28] A.P.Long et al., *Rev. Sci. Instrum.*, 51, 8(1980)
[29] A.P.Long et al., *Rev. Sci. Instrum.*, 50, 1376(1979)
[30] H.Takayanagi et al., *Japan. J. Appl. Phys.*, 17, 1117(1978)
[31] Y.Kikuchi et al., *Japan. J. Appl. Phys.*, 19. 2239(1980)
[32] Tsutomu Yamashita et al., *J. Appl. Phys.*, 50, 4503(1979)
[33] J.E.Zimmerman, *J. Appl. Phys.*, 42, 4483(1971)
[34] C.M.Falco, *J. Appl. Phys.*, 46, 3238(1975)
[35] R.A.Buhrman et al., *J. Appl. Phys.*, 45, 4045(1974)
[36] M.Cerdonio et al., *J. Appl. Phys.*, 48, 4799(1977)
[37] T. Fujita, «*SQUID'80, superconducting quantum interference devices and their applications*», Pro. I. C. SQUID, 1980, W. de Gruyter, Berlin, 1980, p.561
[38] O.H.Soerensen, *J. Appl. Phys.*, 47, 5030(1976)
[39] R.Rifkin et al., *J. Appl. Phys.*, 47, 2045(1976)
[40] 薛寿清，第二届全国超导隧道效应学术会议资料(1982)

第四章　直流超导量子干涉器

§4.1　引　　言

直流超导量子干涉器(DC-SQUID)探头的核心部分是两个超导结和大块超导体构成的闭合环路。大块超导体上接有导线，导线通有适当大小的直流电流。

六十年代，人们曾研制成功点接触结、交叉丝、焊滴结等 DC-SQUID[1]，但因性能较差，目前已很少使用。

1974 年到 1975 年，利用铌、铌三钪、氮化铌等材料制成微桥结 DC-SQUID[2~4]。

1976 年，又制成了电阻分流式铌—氧化铌—铅薄膜隧道结 DC-SQUID(图 4.1)[5]。

近来制成了全铌膜隧道结 DC-SQUID[6]；集成式隧道结 DC-SQUID[7]，即把 DC-SQUID 环孔、输入线圈、调制线圈作在同一个基片上。

实用 DC-SQUID 环中超导结的 β_c 小于 1，即

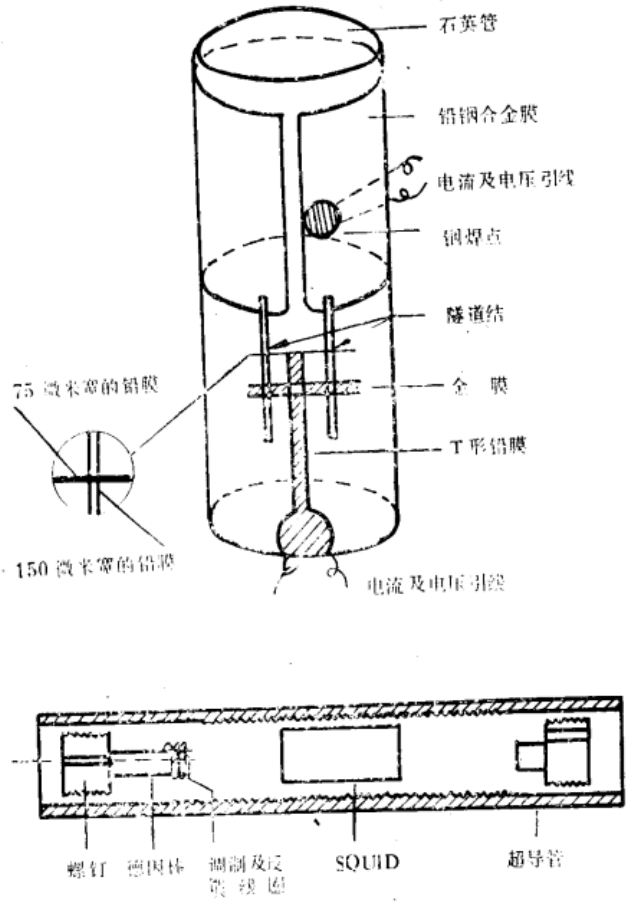


图 4.1　薄膜隧道结 DC-SQUID示意图

$$\beta_c = \frac{2\pi I_0 R^2 C}{\phi_0} < 1$$

因而伏安特性呈单值关系。式中 I_0、R、C 分别为一个结的临界电流、结电阻和结电容。利用这种超导结的 DC-SQUID 伏安特性也是单值的，而且曲线的形状和单个超导结的伏安特性相似。于是，DC-SQUID 环也有一定的无阻载流能力，即注入电流小于 I_c 时 DC-SQUID 环两端电压为 0，I_c 叫做 DC-SQUID 环的临界电流；当注入电流 I 超过 I_c 时，电压 V 不等于 0，这时它成为有阻的但仍是超导的。I_c 的数值与超导结有关。实用 DC-SQUID 的 I_c 为 μA 量级。

对于一给定的 DC-SQUID 环，它的 I_c 和环孔中的外磁通 ϕ_e 有密切关系，如图 4.2 所示。I_c 是 ϕ_e 的周期性函数，周期为 $1\phi_0$。I_c 的最大值 I_{cmax} 出现在 $\phi_e = n\phi_0$ 处，I_c 的最小值 I_{cmin} 出现在 $\phi_e = (n+1/2)\phi_0$ 处，$n = 0, 1, 2, \cdots\cdots$。$\Delta I_c = I_{cmax} - I_{cmin}$ 表示外磁

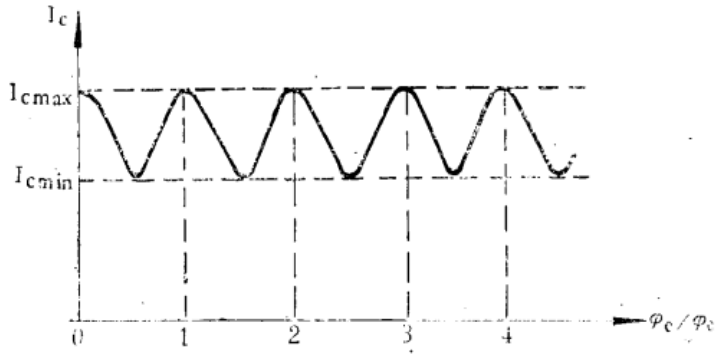


图 4.2 I_c—ϕ_e 特性

场对临界电流的调制程度，叫电流调制深度。

外磁通对临界电流的调制作用，进而表现为对 DC-SQUID 环输出电压的关系。实验结果表明，往 DC-SQUID 环中注入一个恒定电流 $I_b(I_b > I_{cmax})$，这时两端的电压 V 是磁通量 ϕ_e 的周期性函数。图 4.3 给出以 $\phi_e = n\phi_0$ 和 $(n+1/2)\phi_0$ 为参变量的伏安特性。伏安曲线的 $V>0$ 部分随 ϕ_e 变化，变化的上下限分别相应于 ϕ_e 为 $n\phi_0$ 和 $(n+1/2)\phi_0$。电压最大值 V_{max} 和最小值 V_{min} 分别出现在 $\phi_e = (n+1/2)\phi_0$ 及 $n\phi_0$ 处。$\Delta V = V_{max} - V_{min}$ 表示磁场对电压的调制程度，叫做电压调制深度。ΔV 的典型值为 μV 量级。

电压调制深度和电压振荡波形与偏置电流 I_b 的大小有密切关系。当 $I_b = I_{cmax}$ 时，电压调制深度最大。当 I_b 很大或很小时，电

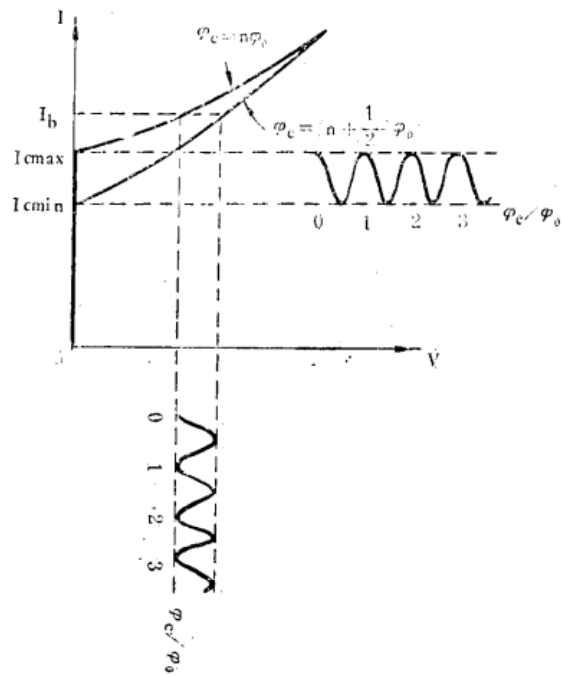


图 4.3 以 ϕ_e 为参变量的 I—V 特性曲线

压调制深度为0，在实用应用中，所选I_b稍大于$I_{c\max}$，借以得到较大的电压调制深度及较完整的波形。该波形即$V-\phi_e$曲线叫做DC-SQUID的三角波。由三角波可以求出输出电压对外磁通的变化率即DC-SQUID的正向传递函数$\partial V/\partial\phi_e$。

下一节我们将对DC-SQUID的$I-V$特性、$V-\phi_e$特性及噪声特性作理论分析。

§4.2 DC-SQUID环的特性

一、DC-SQUID方程式[11]

图4.4为DC-SQUID环的等效电路。假定超导结的结电容为零，超导结可以等效成理想超导结和结电阻并联电路。二个理想超导结的临界电流分别为$(1-\alpha)I_0$和$(1+\alpha)I_0$，$|\alpha|\leqslant 1$，α表示临界电流的不对称程度，结电阻分别为$R/(1-\rho)$和$R/(1+\rho)$，$|\rho|<1$，ρ表示结电阻的不对称程度。L_1、L_2和M为超导支路的自感及它们间的互感。DC-SQUID环用恒定电流I偏置，但因理想超导结的非线性，二支路内的电流是随时间t变化的，

$$I=I_1(t)+I_2(t) \tag{4.1}$$

$I_1(t)$和$I_2(t)$在环孔中产生正负磁通。为了考虑它们的合成效果，定义沿环孔的环流$J(t)$，

$$J(t)=\frac{I_2(t)-I_1(t)}{2} \tag{4.2}$$

电流$I_1(t)$和$I_2(t)$与超导结两端电压$V_1(t)$和$V_2(t)$、位相差$\theta_1(t)$和$\theta_2(t)$的关系为：

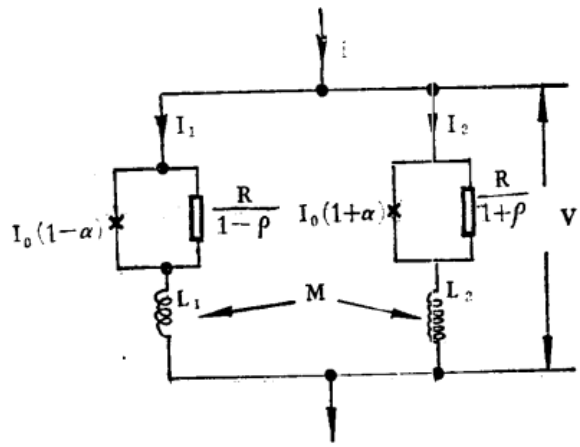


图4.4 忽略结电容后，DC-SQUID环的等效电路

$$I_1=(1-\alpha)I_0\sin\theta_1+(1-\rho)(V_1-V_{N1})/R \tag{4.3}$$

$$I_2=(1+\alpha)I_0\sin\theta_2+(1+\rho)(V_2-V_{N2})/R \tag{4.4}$$

$$\frac{d\theta_1}{dt}=\frac{2\pi}{\phi_0}V_1 \tag{4.5}$$

$$\frac{d\theta_2}{dt}=\frac{2\pi}{\phi_0}V_2 \tag{4.6}$$

V_{N1}、V_{N2}为结的噪声电压。DC-SQUID环两端的电压V为：

$$V=V_1+L_1\frac{dI_1}{dt}+M\frac{dI_2}{dt} \tag{4.7}$$

$$V=V_2+L_2\frac{dI_2}{dt}+M\frac{dI_1}{dt} \tag{4.8}$$

SQUID环孔中的全磁通ϕ为：

$$\begin{aligned}\phi&=L_1I_1-L_2I_2-MI_1-MI_2+\phi_e\\&=(L_1-M)I_1-(L_2+M)I_2+\phi_e\end{aligned} \tag{4.9}$$

式中ϕ_e为环孔中的外磁通，(L_1-M)和(L_2+M)分别为左侧支路和右侧支路的等效自感。

环电感 L 和 L_1、L_2、M 的关系为：

$$L = L_1 + L_2 - 2M = (L_1 - M) + (L_2 - M)$$

为考虑左右支路自感的不对称性，引入参数 η，

$$L_1 - M = (1-\eta)\frac{L}{2}$$

$$L_2 - M = (1+\eta)\frac{L}{2}$$

再考虑到式(4.1)和(4.2)，则式(4.9)化简为：

$$\phi = \phi_e + \frac{\eta L I}{2} + LJ \tag{4.9'}$$

由式(4.1)和(4.2)，注意到 I 为常数，则

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{dI_1}{dt} = \frac{dI_2}{dt}$$

代入式(4.7)和(4.8)，得到，

$$V = V_1 - \frac{(1-\eta)L}{2}\frac{dJ}{dt} \tag{4.10}$$

$$V = V_2 + \frac{(1+\eta)L}{2}\frac{dJ}{dt} \tag{4.11}$$

位相差 θ_1、θ_2 和全磁通 ϕ 的关系为：

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{2\pi\phi}{\phi_0} = \frac{2\pi}{\phi_0}\left(\phi_e + \frac{\eta L I}{2} + LJ\right) \tag{4.12}$$

由式(4.1)～(4.12)，消去 I_1、I_2、V_1、V_2，可得到用偏流 I、外磁通 ϕ_e、噪声电压 V_{N1} 和 V_{N2}、SQUID 的参数 I_0、R、L、α、ρ、η 表示的 I 和 V 的公式。为简化起见，引入无量纲参量，即

$$v = \frac{V}{I_0 R}, \quad v_{N1} = \frac{V_{N1}}{I_0 R}, \quad v_{N2} = \frac{V_{N2}}{I_0 R}$$

$$i = \frac{I}{I_0}, \quad j = \frac{J}{I_0}, \quad \varphi_e = \frac{\phi_e}{\phi_0}$$

$$\tau = t \Big/ \frac{\phi_0}{2\pi I_0 R}$$

得到，

$$j = (\theta_1 - \theta_2 - 2\pi\varphi_e)/\pi\beta' - \eta i/2 \tag{4.13}$$

$$v = \frac{1+\eta}{2}\frac{d\theta_1}{d\tau} + \frac{1-\eta}{2}\frac{d\theta_2}{d\tau} \tag{4.14}$$

$$\frac{d\theta_1}{d\tau} = \frac{i/2 - j - (1-\alpha)\sin\theta_1}{1-\rho} + v_{N1} \tag{4.15}$$

$$\frac{d\theta_2}{d\tau} = \frac{i/2 + j - (1+\alpha)\sin\theta_2}{1+\rho} + v_{N2} \tag{4.16}$$

式中

$$\beta' = \frac{2LI_0}{\phi_0} \tag{4.17}$$

β' 和上一章的 β 相差 π 倍，这是各个文献资料中的定义不同所致，按简化方程来说定义 β，较好。但因后面要用到以 β' 为参变量的曲线，故本章使用 β'。

式(4.13)～(4.17)是描述 DC-SQUID 的方程组，由此方程组可以解出 DC-SQUID 的各种特性。因为这是一个比较复杂的方程组，下面分几种情况加以讨论。

二、不计噪声时，DC-SQUID 的特性

此时 $v_{N1}=v_{N2}=0$。

首先假定偏流 i 小于临界电流 i_c($i_c=I_c/I_0$)，于是，DC-SQUID 处在无阻区域($\rho=0$)，环两端电压 v 等于零，临界电流 i_c 是 α、β'、η、φ_e 的函数。现在讨论以 α、β'、η 为参变量的 i_c—φ_e 关系。由于 $v=0$，式(4.14)、(4.15)、(4.46)中的 $d\theta_1/d\tau$ 和 $d\theta_2/d\tau$ 为零，经过简单运算，就可以得到：

$$i=(1-\alpha)\sin\theta_1+(1+\alpha)\sin\theta_2 \tag{4.18}$$

$$2j=-(1-\alpha)\sin\theta_1+(1+\alpha)\sin\theta_2 \tag{4.19}$$

$$\theta_2=\theta_1-2\pi\varphi_e-\pi\beta' j-\pi\beta'\eta i/2 \tag{4.20}$$

可以看出，式(4.18)～(4.20)与结电阻的不对称度 ρ 无关，这是 $v=0$ 的必然结论。这三个方程组需要用数值计算法求解。计算结果指出，对于 $\beta'=1.0$，以 α 和 η 为参变量时的 i_c—φ_e 曲线，临界电流最大值为 2，与 α 和 η 的数值无关。当 α 从 0 向 1 增加时，电流调制深度逐渐减小，最后成为零，临界电流最小值相应的 φ_e 跟 1/2 的偏离越来越大。电流调制深度和 η 无关，当 η 从零逐渐增加到 1 时，临界电流最小值相应的 φ_e 逐渐减小。对于 $\alpha=\eta=0$，以 β' 为参变量的 i_c—φ_e 曲线，临界电流最大值为 2，临界电流最小值相应的 φ_e 为 1/2。

图 4.5*a* 示出给定 I_0 时的 ΔI_c—L 曲线。纵坐标为 $\Delta I_c/2I_0$，横坐标为 $\beta'=2LI_0/\phi_0$。可以看出，当 L 减小到使得 $\beta'<0.1$ 时，ΔI_c 已接近极限值 $2I_0$。因该极限值和 L 无关，环电感 L 小于 $\frac{0.1\phi_0}{2I_0}$ 后便很少影响 ΔI_c。图 4.5*b* 示出给定 L 时的 ΔI_c—I_0 曲线，纵坐标为 $\frac{\Delta I_c L}{\phi_0}$，横坐标是 $\beta'=I_0 2L/\phi_0$。可以看出，当 I_0 足够大使得 $\beta'\geqslant 40$ 时，ΔI_c 便接近极限值。这个极限值和 I_0 无关，约等于 ϕ_0/L。

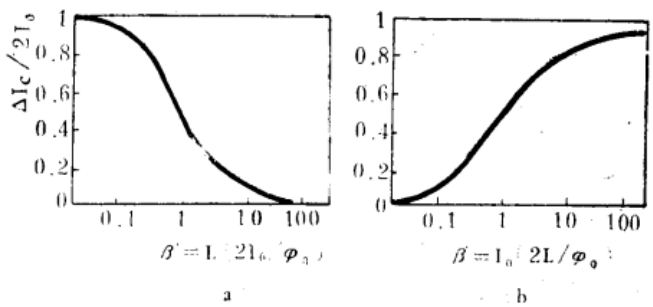


图 4.5　ΔI_c—L 和 ΔI_c—I_0 曲线

再来讨论偏置电流大于临界电流，即 $v\neq 0$ 时的特性。此时，由式(4.13)～(4.17)可以得到以 α、β'、η、ρ、φ_e 为参变量的 v—τ 曲线和 j—τ 曲线。环流 j 和电压 v 是时间振荡函数，待起始过程结束后，便进入稳定振荡过程。

图 4.6 示出已进入稳定振荡的 $v-\tau$ 曲线和 $j-\tau$ 曲线。对所有情况，v 的振荡周期为 $2\pi/\bar{v}$，$\bar{v}$ 是 v 对时间的平均值。对于完全对称的 DC-SQUID($\alpha=\eta=\rho=0$)，当 $\varphi_e=0$ 时，$j=0$；当 $\varphi_e=0.5$ 时，j 围绕 0 值以周期 $\pi/\bar{v}$ 进行振荡；对于其他 φ_e 值，j 的振荡周期和 v 的振荡周期相同。

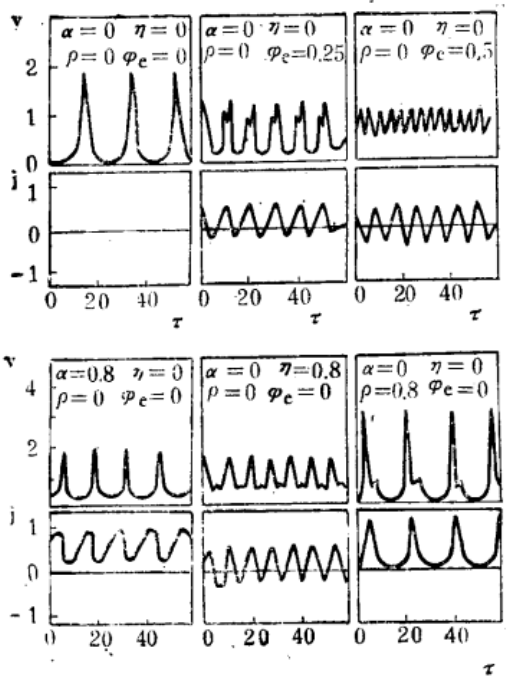


图 4.6 $v-\tau$ 和 $j-\tau$曲线

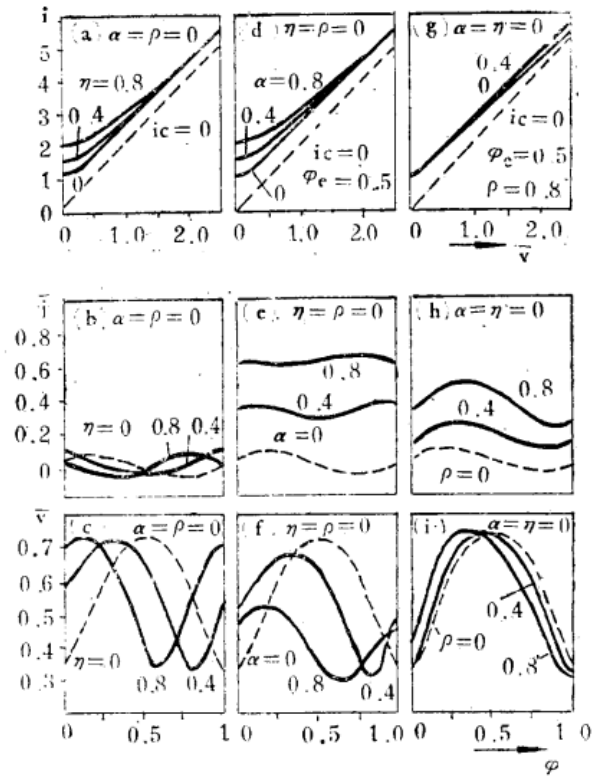


图 4.7 $i-\bar{v}$、$\bar{j}-\varphi_e$ 和 $\bar{v}-\varphi_e$ 曲线

图 4.7 示出 $\beta'=1$，以 α、η、ρ 为参变量时的 $i-\bar{v}$ 曲线、$\bar{j}-\varphi_e$ 曲线和 $\bar{v}-\varphi_e$ 曲线。由图 4.7$a\sim c$ 可知，$\eta\neq 0$ 时的 $j-\varphi_e$ 曲线和 $\bar{v}-\varphi_e$ 曲线相对于 $\eta=0$ 的曲线有一定的移动。图 4.7$d\sim f$ 分别是 $\varphi_e=0.5$ 的 $i-\bar{v}$ 曲线、$i=2.1$ 的 $\bar{j}-\varphi_e$ 曲线和 $\bar{v}-\varphi_e$ 曲线与 α 的关系，可以看出，α 增加时，$\bar{j}$ 增加，$\bar{v}$ 的振荡幅度减小。当 $\alpha\to 1$ 时，$i-\bar{v}$ 曲线与 φ_e 无关，并趋向单个超导结的 $i-\bar{v}$ 曲线。图 4.7 $g\sim i$ 示出 ρ 的影响。可以看出，$\varphi_e=0.5$ 的 $i-\bar{v}$ 曲线与 ρ 的关系不大；$\bar{v}-\varphi_e$ 曲线与 ρ 的关系也不强烈；$\bar{j}-\varphi_e$ 曲线和 ρ 的关系很密切。

总之，DC-SQUID 的 $i-\bar{v}$ 特性和 $\bar{v}-\varphi_e$ 特性曲线与二支路的自感、超导结的临界电流和结电阻的不对称度的关系并不密切，因此，在下面讨论中仅限于对称情况($\alpha=\eta=\rho=0$)。

三、考虑噪声时，DC-SQUID 的特性

DC-SQUID 环本身的噪声有三个来源：第一，热噪声。由于电子在结电阻上的热运动，在电阻两端产生一个电压噪声。这个热噪声电压可用一个噪声电压发生器和该电路的串联电路来等效，方均电压噪声频谱密度为：

$$S_V^R = \frac{d\overline{v}^2}{df} = 4K_BRT \tag{4.21}$$

式中 K_B 为玻尔兹曼常数，T 为电阻 R 的温度，$\overline{V}^2$ 为电压噪声的方均值，f 为频率。热噪声也可以用一个噪声电流发生器和电阻 R 的并联电路来等效，方均电流噪声频谱密度为：

$$S_I^R = \frac{d\overline{I}^2}{df} = \frac{4K_BT}{R}$$

式中 $\overline{I}^2$ 为电流噪声的方均值。可以看出，S_V^R 和 S_I^R 均和温度 T 成正比，降低温度可以减小热噪声；第二，散粒噪声，电流是由一个个分立的电子定向运动形成的。运动电子数目的起伏导致散粒噪声。方均散粒噪声电流频谱密度为：

$$\frac{d\overline{I}^2}{df} = 2eI \tag{4.22}$$

式中 e 为电子电量，I 为平均电流强度。散粒噪声只是在 I 很小时才显现出来。因 DC-SQUID 探头的工作温度通常是 4.2 K，I 为 μA 量级，R 为 Ω 数量级，热噪声比散粒噪声强很多，散粒噪声可以忽略。以上两种噪声都有一个与频率无关的频谱密度，因此也把它们叫做白噪声；第三，闪变噪声。它在低频时显著，频谱密度为：

$$\frac{d\overline{V}^2}{df} = \frac{A}{f}$$

式中 A 为常系数。闪变噪声也叫做 $1/f$ 噪声。

由于散粒噪声很小、闪变噪声只是在很低频率范围才起主要作用，故在下面的理论分析中，首先考虑热噪声。这时，式(4.15)和式(4.16)中的噪声电压 v_{N1} 和 v_{N2} 是无关的，其频谱密度由式(4.21)表示，写成无量纲形式，即

$$S_v^R = 4\Gamma \tag{4.23}$$

式中

$$\Gamma = \frac{2\pi K_BT}{I_0\phi_0} \tag{4.24}$$

对于最佳 β' 值，即 $\beta' \approx 1$，假定 $L = 1\times10^{-9}$H，则 I_0 约为 1 μA。在这种情况下，$T \leqslant 4.2$K 时，$\Gamma \leqslant 0.2$。

下面给出式(4.13)～(4.17)、(4.23)、(4.24)的数值解。

图 4.8*a* 示出关于对称 DC-SQUID 环，$\Gamma = 0.05$，$\beta' = 1.0$，以 φ_e 为参变量的 $i-\overline{v}$ 曲线。虚线表示不计噪声时的曲线。可以看出，曲线的斜率即微分电阻 $\frac{d\overline{v}}{di}$ 是 i 和 φ_e 的函数。当 φ_e 从零起增加到 0.5 时，微分电阻的最大值随 i 减小。由这些曲线，可以得到以 i 为参变量的 $\overline{v}-\varphi_e$ 曲线，如图 4.8*b*。可以看出，当偏流 $i \geqslant 3$ 时，$\overline{v}$ 基本上和 φ_e 无关；当 $i \leqslant 1$ 时，大部分 φ_e 相应的 $\overline{v}$ 等于零；对于中等大小的 i，传递函数 $\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial\varphi_e}\right)_i$ 取决于 φ_e、β' 和 Γ，而 β' 取决于 L 和 I_0，Γ 取决于 I_0 和 T。

图 4.9*a*～*d* 示出以 φ_e、L、T、I_0 为参变量的 $\left(\frac{d\overline{v}}{d\varphi_e}\right)_i - i$ 曲线，可以看出，所有曲线都有一个峰值。峰的高度和宽度是 φ_e、L、T、I_0 的函数。例如，对于图 4.9*a* 所示的以 φ_e

为参变量的曲线族，当 $\varphi_e \to 0$ 或 $\varphi_e \to 0.5$ 时，峰高减小；当 $\varphi_e = 0$ 或 0.5 时，对于所有 i 值，$\left(\frac{d\bar{v}}{d\varphi_e}\right)_i = 0$。因此，$\varphi_e$ 的变化能够使 $\left(\frac{d\bar{v}}{d\varphi_e}\right)_i$ 产生显著变化。由图 4.9*b* 可知，当 L

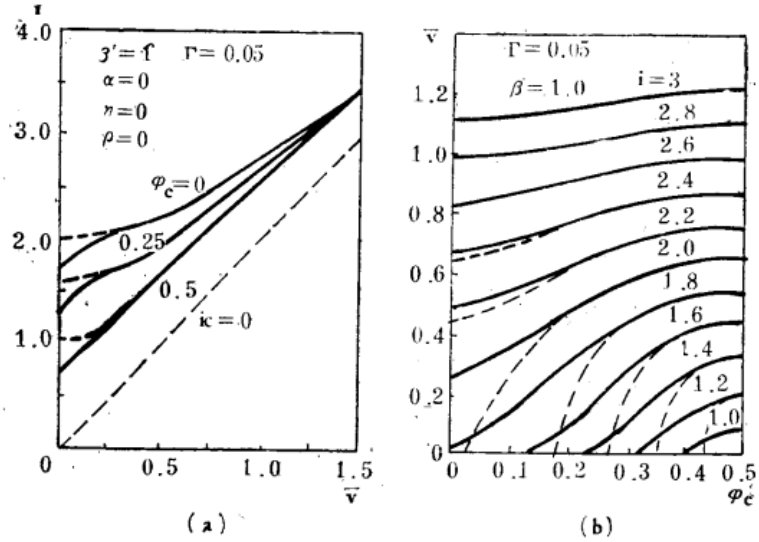


图 4.8　考虑噪声时的 $i-\bar{v}$ 和 $\bar{v}-\varphi_e$ 曲线

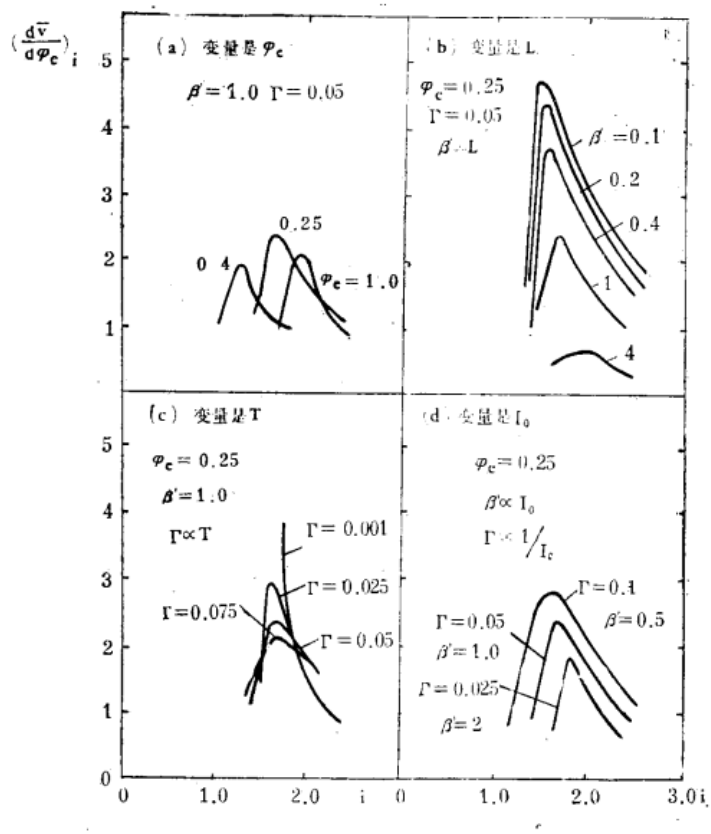


图 4.9　$\left(\frac{d\bar{v}}{d\varphi_e}\right)_i - i$ 曲线

减小到使得 $\beta' \leqslant 0.1$ 时，$\left(\frac{d\overline{v}}{d\varphi_e}\right)_i - i$ 曲线接近一条与 L 无关的极限曲线；当 L 较大使得 $\beta' \gg 1$ 时，$\left(\frac{d\overline{v}}{d\varphi_e}\right)_i$ 趋向零。由图 4.9*c* 可知，当增加温度 T 使得 Γ 较大时，$\left(\frac{d\overline{v}}{d\varphi_e}\right)_i$ 趋向零；反之，当温度较低使得 $\Gamma \ll 0.001$ 时，$\left(\frac{d\overline{v}}{d\varphi_e}\right)_i - i$ 曲线的峰值特别大，成为一条发散曲线。图 4.9*d* 是以 I_0 为参变量的，由于 I_0 正比于 β' 和反比于 Γ，故这个曲线族是图 4.9*b* 及 4.9*c* 的组合，当 I_0 变化时，β' 和 Γ 对 $\left(\frac{d\overline{v}}{d\varphi_e}\right)_i$ 的影响是相反的，故 $\left(\frac{d\overline{v}}{d\varphi_e}\right)_i$ 和 I_0 的关系不如 β' 或 Γ 单独存在时强烈。当 I_0 很大时 ($\Gamma \ll 0.1$，$\beta' \gg 1.0$)，$\left(\frac{d\overline{v}}{d\varphi_e}\right)_i$ 趋向无噪声、大 β' 值时极限曲线。

四、电压噪声频谱密度

文献[11]中计算了 DC-SQUID 环的电压噪声频谱密度与 φ_e、L、T、I_0 的关系，指出这个电压噪声频谱密度在约瑟夫逊频率及其倍频处有一系列的峰，而在远低于约瑟夫逊频率的频率范围内是白噪声。我们感兴趣的是电压噪声频谱密度在这个白噪声范围内的平均值，用符号 S_v 表示。

图 4.10*a* 示出 $\beta' = 1.0$，$\Gamma = 0.05$，以 φ_e 为参变量的 $\frac{S_v}{2\Gamma} - i$ 曲线，S_v 除以 2Γ 的道理在于：DC-SQUID 环中的二个结电阻是并联的，二相同电阻并联后的电压噪声频谱密度为 2Γ。由此图可以看出，当 i 约等于临界电流 i_c 即 $I \approx 2I_0$ 时，$\frac{S_v}{2\Gamma}$ 取极大值；当 i 比 i_c 大很多时，$\frac{S_v}{2\Gamma}$ 趋向极限值 1.0；当 φ_e 从 0 增加到 0.5 时，极大值逐渐减小。

图 4.10*b* 示出 $\varphi_e = 0.25$，以 L 为参变量的 $\frac{S_v}{2\Gamma} - i$ 曲线。当增加 L 使得 β' 比 1 大很多时，$\frac{S_v}{2\Gamma}$ 趋向临界电流为 $2I_0$ 的单个超导结的曲线；当减小 L 使得 $\beta' \ll 1$ 时，$\frac{S_v}{2\Gamma}$ 和 L 无关，这个结论与 L 小时 ΔI_c 和 $\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial\varphi_e}\right)_i$ 跟 L 无关的结论是一致的。

图 4.10*c* 示出以温度 T 为参变量的 $\frac{S_v}{2\Gamma} - i$ 曲线。当 T 很小使得 $\Gamma \leqslant 0.001$ 时，$\frac{S_v}{2\Gamma} - i$ 曲线趋近无噪声的曲线，当 $i \to i_c$ 时，$\frac{S_v}{2\Gamma}$ 趋向无限大。当 T 很大使得 $\Gamma \geqslant 1$ 时，$\frac{S_v}{2\Gamma}$ 约等于 1，即 S_v 趋近于结电阻本身的频谱密度 2Γ。

图 4.10*d* 示出以 I_0 为参变量的 $\frac{S_v}{2\Gamma} - i$ 曲线。当 I_0 很大使得 $\beta' \to \infty$ 和 $\Gamma \to 0$ 时，$\frac{S_v}{2\Gamma} - i$ 曲线趋向无噪声、单个超导结的曲线。当 I_0 很小使得 $\beta' \to 0$ 和 $\Gamma \to \infty$ 时，$\frac{S_v}{2\Gamma} \to 1$。

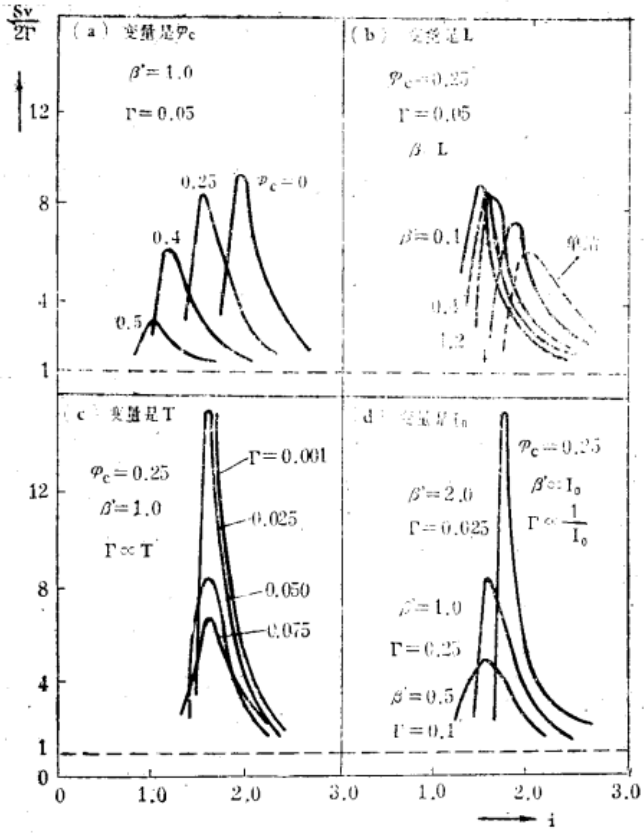


图 4.10 $\frac{S_V}{2\Gamma}$—i 曲线

五、环流噪声频谱密度及相关噪声频谱密度[8]

结电阻中的热噪声除了在 SQUID 环两端产生电压噪声外，还因两个结电阻经超导线构成闭合回路而产生环流噪声。电压噪声和环流噪声是相关的，因此还存在它们间的相关噪声。

计算指出，它们的频谱密度曲线在约瑟夫逊频率$f_J=\frac{\overline{v}}{2\pi}$及其倍频处有被噪声扩宽的峰，在频率低于$\frac{f_J}{10}$的低频范围内，噪声是白噪声。下面给出白噪声范围的计算结果。

图 4.11 和 4.12 示出 $\beta'=1.0$，$\Gamma=0.05$，$L=0.3$nH，$I_0=3\mu$A，$T=4$K，以 φ_e 为参变量的$\frac{S_j}{2\Gamma}$—i 曲线和$\frac{S_{j0}}{2\Gamma}$—i 曲线，S_j 和 S_{j0} 分别为环流噪声和相关噪声频谱密度的无量纲值。可以看出，对于给定的 φ_e，曲线峰值在 i_c 附近。当 φ_e 增加时，峰变高，峰值相应的 i 减小。

由图 4.11 可知，$\varphi_e=0.5$，i 从 i_c 减小时，$S_j/2\Gamma$ 随之急骤增加，这是因为 $\varphi_e=0.5$ 时 SQUID 环有两个稳定态，一个稳定态相应的 j 小于 0，另一个稳定态相应的 j 大于 0。结电阻中的热噪声不仅能改变环流，而且还能引起两个态间的跃迁，还可以看出，对于任一给定的 φ_e，$i\gg i_c$ 时，$\frac{S_j}{2\Gamma}\to 0$。

由图 4.12 可以看出，$i \gg i_c$ 时，由于二结电阻中的热噪声是不相关的，$S_{iv} \to 0$。i 约为

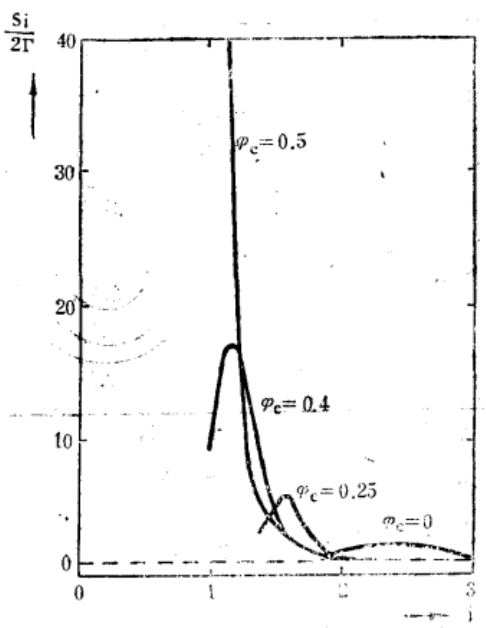


图 4.11 $\frac{S_i}{2\Gamma} - i$ 曲线

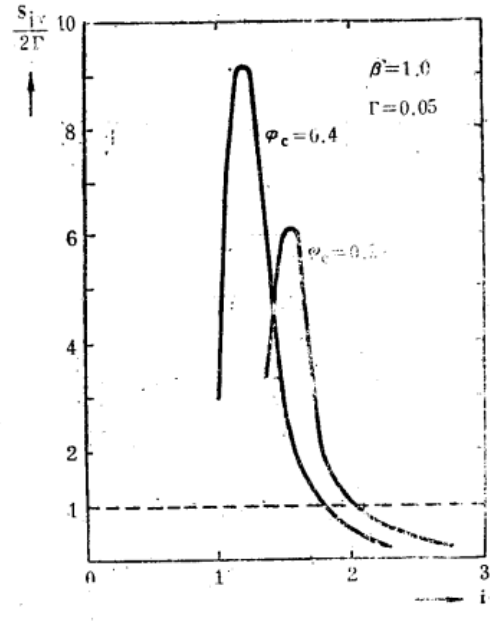


图 4.12 $\frac{S_{iv}}{2\Gamma} - i$ 曲线

i_c 时，$S_{iv} \neq 0$，这意味着环流噪声和电压噪声相关。相关的原因是环流噪声会产生磁通噪声，它类似于外加磁通噪声，又因DC-SQUID的传递函数$\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi_e}\right)_i$建立起输出电压平均值和输入外磁通的关系，从而使环流噪声产生的磁通噪声跟总的电压噪声有关。$i \approx i_c$ 时，由于$\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi_e}\right)_i \neq 0$，电压噪声和环流噪声相关。$i \gg i_c$ 时，$\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi_e}\right)_i \to 0$，两个噪声相互独立。$\varphi_e = 0$ 或 0.5 时，由于任一偏流的$\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi_e}\right)_i = 0$，$S_{iv} = 0$。

对于图4.1所示的圆柱薄膜隧道结DC-SQUID参数及典型的偏流值($I_b = 1.3 I_c$)，$\beta' = 1$，$\Gamma = 0.05$ 时，$\frac{S_v}{2\Gamma} = 8$，$\frac{S_i}{2\Gamma} = 5.5$，$\frac{S_{iv}}{2\Gamma} = 6$。

六、磁通噪声

由上面的$\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi_e}\right)_i - i$、$\frac{S_v}{2\Gamma} - i$、$\frac{S_i}{2\Gamma} - i$、$\frac{S_{iv}}{2\Gamma} - i$ 曲线，容易求出DC-SQUID环的磁通噪声。为此，将$\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi_e}\right)_i$、$\frac{S_v}{2\Gamma}$、$\frac{S_i}{2\Gamma}$、$\frac{S_{iv}}{2\Gamma}$用它们的有量纲量$\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \phi_e}\right)_I$、$S_V^R$、$S_I^R$、$S_{IV}^R$ 表示：

$$\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \phi_e}\right)_I = \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi_e}\right)_i \frac{I_0 R}{\phi_0} \tag{4.25}$$

$$S_V^R = 2K_B TR\left(\frac{S_v}{2\Gamma}\right) \tag{4.26}$$

$$S_I^R = \frac{2K_BT}{R}\left(\frac{S_i}{2\Gamma}\right) \qquad (4.27)$$

$$I^R{}_V = 2K_BT\left(\frac{S_{iv}}{2\Gamma}\right) \qquad (4.28)$$

不计相关噪声时，总电压噪声频谱密度 S_V 为：

$$S_V = S_V^R + S_I^R L^2\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \phi_e}\right)_I^2 \qquad (4.29)$$

相应的总磁通噪声频谱密度 S_ϕ 为：

$$S_\phi = S_V \Big/ \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \phi_e}\right)_I^2 = S_V^R \Big/ \left(\frac{\partial \bar{V}}{2\phi_e}\right)_I^2 + S_I^R L^2 \qquad (4.30)$$

由以上公式容易得到，

$$S_\phi = \frac{8L^2K_BT}{R\beta'^2}\xi + \frac{2L^2K_BT}{R}\left(\frac{S_i}{2\Gamma}\right) \qquad (4.31)$$

式中 ξ 为电压噪声相应的无量纲磁通噪声频谱密度，

$$\xi = \left(\frac{S_v}{2\Gamma}\right) \Big/ \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi_e}\right)_i^2 \qquad (4.32)$$

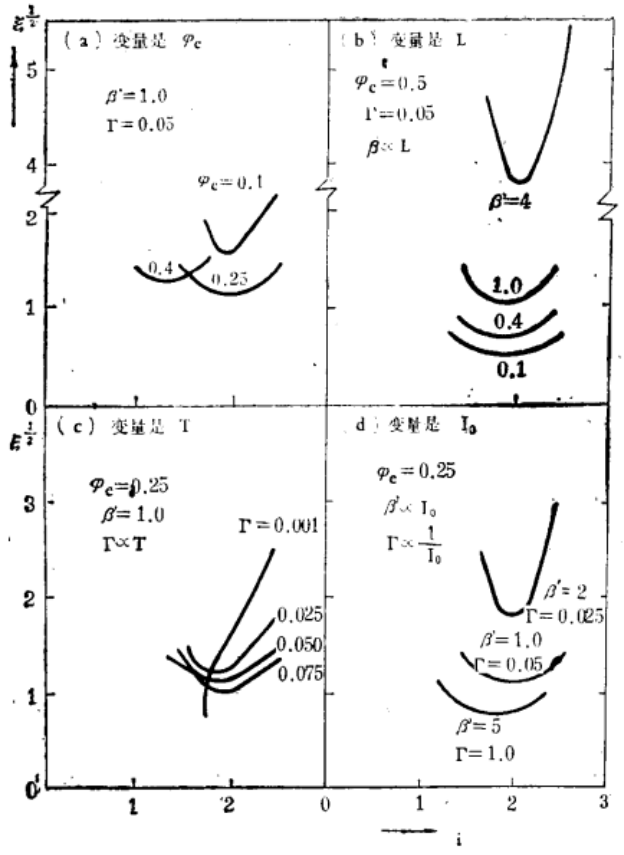


图 4.13 $\xi^{1/2}$—i 曲线

图 4.13 a 示出 $\Gamma=0.05$，$\beta'=1.0$，以 φ_e 为参变量的 $\xi^{1/2}$—i 曲线。可以看出，当 i 稍大于 i_c 时，$\xi^{1/2}$ 取极小值 $\xi_{min}^{1/2}$。在 φ_e 从 0.1 到 0.4 的范围内，$\xi_{min}^{1/2}$ 和 φ_e 的关系不大。当 $\varphi_e\to 0$ 或 0.5 时，$\xi^{1/2}\to\infty$，这是因为 $\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi_e}\right)_i \to 0$ 的原故。

图 4.13b 示出 $\varphi_e=0.25$，$\Gamma=0.05$，以 L 为参变量的 $\xi^{1/2}$—i 曲线。当 i 稍大于 i_c 时，$\xi^{1/2}$ 取极小值 $\xi_{min}^{1/2}$。当 $\beta'\to 0$ 时，曲线变得愈来愈平坦，$\xi^{1/2}\to 0.5$；当 $\beta'>1$ 时，曲线很陡峭，随着 β' 的增加，$\xi_{min}^{1/2}$ 大体上等于 β'。

图 4.13c 示出 $\varphi_e=0.25$，$\beta'=1.0$，以 T 为参变量的 $\xi^{1/2}$—i 曲线。当变化温度使得 Γ 在 0.025 到 0.075 之间时，$\xi^{1/2}$ 和温度的关系不密切，$\xi^{1/2}$ 约等于 1；当温度很高使得 Γ 很大时，$\xi^{1/2}$ 趋向无限大，这是因为 $\frac{S_v}{2\Gamma}$ 和 $\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi_e}\right)_i \to 0$。当温度很低使得 Γ 趋向 0 时，由于 $\frac{S_v}{2\Gamma}$ 和 $\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi_e}\right)_i$ 在 $i=i_c$ 处发散，$\xi^{1/2}$—i 曲线成为陡峭的。当 $i\to i_c$ 时 $\xi^{1/2}\to 0$。

图 4.13d 示出 $\varphi_e=0.25$，以 I_0 为参变量的 $\xi^{1/2}$—i 曲线。当 I_0 增加使得 β' 增加而 Γ 减小时，曲线愈来愈陡峭，$\xi_{min}^{1/2}$ 也变大。当 I_0 较小使得 β' 为中等大小时，曲线成为平坦的。对于很小的 I_0，当 $\Gamma\to\infty$，$\xi^{1/2}\to\infty$。

七、固有能量分辨率

由式(4.31),DC-SQUID 的固有能量分辨率 $S_\phi/2L$ 为:

$$\frac{S_\phi}{2L}=\frac{4LK_BT}{R\beta'^2}\xi+\frac{LK_BT}{R}\left(\frac{S_j}{2\Gamma}\right) \tag{4.33}$$

此式是固有能量分辨率的严格公式。下面给出 $\beta'\gg1$ 和 $\beta'\ll1$ 时的近似公式。为此，先推导 $\left(\frac{\partial\bar{V}}{2\phi_e}\right)_I$ 的近似公式。对于 $\phi_e=\left(n\pm\frac{1}{4}\right)\phi_0$ 情况，

$$\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial\phi_e}\right)_I\approx\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial I_c}\right)_I\cdot\frac{dI_c}{d\phi_e} \tag{4.34}$$

式中 $\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial I_c}\right)_I\approx\frac{R}{2}$，$\frac{dI_c}{d\phi_e}\approx\frac{2\Delta I_c}{\phi_0}$。在讨论图 4.5 时已经指出，$\beta'\geqslant40$ 时，$\Delta I_c\approx\frac{\phi_0}{L}$；

$\beta'\leqslant0.1$ 时，$\Delta I_c\approx2I_0=\frac{\beta'\phi_0}{L}$，于是，

$$\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial\phi_e}\right)_I\approx\frac{R}{L}\qquad(\beta'\gg1\text{ 时}) \tag{4.35}$$

$$\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial\phi_e}\right)_I\approx\frac{\beta'R}{L}\qquad(\beta'\ll1\text{ 时}) \tag{4.36}$$

由式(4.33)、(4.35)、(4.36)容易得到，

$$\frac{S_\phi}{2L}=\frac{K_BTL}{R}\left(\frac{S_v}{2\Gamma}+\frac{S_j}{2\Gamma}\right)\qquad(\beta'\gg1\text{ 时}) \tag{4.37}$$

$$\frac{S_\phi}{2L}=\frac{K_BTL}{R}\left(\frac{S_v}{2\Gamma}\frac{1}{\beta'^2}+\frac{S_j}{2\Gamma}\right)\quad(\beta'\ll1\text{ 时}) \tag{4.38}$$

取 $\frac{S_v}{2\Gamma}\approx8$，$\frac{S_j}{2\Gamma}\approx5.5$，则

$$\frac{S_\phi}{2L}\approx\frac{13.5K_BTL}{R}\qquad(\beta'\gg1\text{ 时}) \tag{4.39}$$

$$\frac{S_\phi}{2L}\approx\frac{8K_BTL}{R\beta'^2}\qquad(\beta'\ll1\text{ 时}) \tag{4.40}$$

现在讨论使 $S_\phi/2L$ 取极小值时的最佳 β' 值。

首先讨论一个简单情况：DC-SQUID 不按磁通锁定模式工作，而是作为小信号放大器使用。由式(4.39)、(4.40)及(4.17),可以得到，

$$\frac{S_\phi}{2L}\propto\beta'\qquad(\beta'\gg1\text{ 时})$$

$$\frac{S_\phi}{2L}\propto\beta'^{-1}\qquad(\beta'\ll1\text{ 时})$$

第一个式子表明，在大 β' 区域，β' 愈大，则 $\frac{S_\phi}{2L}$ 愈大。第二个式子表明，在小 β' 区域，β' 愈小，则 $\frac{S_\phi}{2L}$ 愈大，因此，存在一个使 $\frac{S_\phi}{2L}$ 取极小值的中等大小的 β' 值，例如，对于圆柱形薄膜隧道结 DC-SQUID,β' 在 1 到 10 的范围内，固有能量分辨率较小,并基本上不变，

约为 1.6×10^{-32}J/Hz。

如果 DC-SQUID 按磁通锁定模式工作，则 $\frac{S_\phi}{2L}$ 和 β' 的关系更密切。因为最佳偏流取决于外加磁通，恒定偏流的 DC-SQUID 在整个磁通调制周期内不可能经常处于最佳偏流状态，其结果，β' 增加时 $\frac{S_\phi}{2L}$ 的平均值也增加；另外，对于大的 β' 值，$\frac{S_\phi}{2L}$ 成为 $i=\frac{I}{I_0}$ 的陡峭函数，I 或 I_0 的微小变化，就会引起 $\frac{S_\phi}{2L}$ 的很大变化。实验结果表明，按磁通锁定模式工作的 DC-SQUID，$\frac{S_\phi}{2L}$ 的极小值对应的 β' 约等于 1。

八、能量分辨率

和 RF-SQUID 一样，在 DC-SQUID 的绝大多数应用中，被测信号是借助于输入线圈耦合到 DC-SQUID 环孔中的。在这种情况下，为了充分表征它的性能，仅知道 SQUID 环的磁通噪声频谱密度 S_ϕ 和固有能量分辨率 $S_\phi/2L$ 是不够的，还必须知道 DC-SQUID 环和输入线圈组合系统的能量分辨率 ε，

$$\varepsilon=\frac{S_\phi}{2k^2L} \tag{4.41}$$

式中 k 为 SQUID 环孔和输入线圈间的耦合系数，

$$k^2=\frac{M_i^2}{LL_i} \tag{4.42}$$

L_i 为输入线圈自感，M_i 为 SQUID 环和输入线圈的互感。

现在我们讨论减小 ε 的途径。由上述可知，当

$$\beta'=\frac{2I_0L}{\phi_0}\approx1 \tag{4.43}$$

时，$\frac{S_\phi}{2L}$ 取极小值。因为 $\beta'\approx1$ 时，$\xi\approx1$，$\frac{S_i}{2I}\approx5.5$，于是，由式(4.33)可得 $\frac{S_\phi}{2L}$ 的极小值 $\left(\frac{S_\phi}{2L}\right)_{min}$ 为：

$$\left(\frac{S_\phi}{2L}\right)_{min}=\frac{9.5K_BTL}{R} \tag{4.44}$$

又 DC-SQUID 中的超导结的 β_c 应当为：

$$\beta_c=\frac{2\pi I_0R^2C}{\phi_0}\approx1 \tag{4.45}$$

由式(4.41)、(4.44)、(4.45)消去 R，得到 ε 的极小值为：

$$\varepsilon=\frac{17K_BT(LC)^{1/2}}{k^2} \tag{4.46}$$

可见，减小 L 和 C，增加 k、降低 T，均可使 ε 减小。但是，和 RF-SQUID 一样，环电感不能无限制减小，因为 L 太小时，耦合系数 k 随之减小。

增加耦合系数 k 的方法是：将平面螺旋状输入线圈和平面 DC-SQUID 环作在同一个基片上，利用这种方法可将 k^2 增加到 0.86，但工艺较复杂；增加 k 的简单方法是：将一个超

导直管切开，切开处贴上绝缘薄膜，再对起来，绕上输入线圈。它的端面贴上含DC-SQUID的平面基片。由于超导直管将输入电流的磁场集中在直管的孔内，大大加强了输入线圈和DC-SQUID环间的电磁耦合。

减小结电容的方法是：减小隧道结的面积，选用介电常数小的绝缘层。结电容很小时，为满足式(4.45)，便需要I_cR大的材料，如铌。氧化铌的介电常数为30，比氧化硅的介电常数大几倍，故铌隧道结的绝缘层最好是氧化硅。

DC-SQUID的工作温度低时，尽管有着ε小的优点，但却需要温度控制设备。同时，式(4.46)只是在温度较高，结电阻中的热噪声比散粒噪声强很多的情况下才是正确的。

当温度很低，使得

$$\frac{K_BT}{eV}\approx\frac{K_BT}{eI_0R}\leqslant 1$$

时，热噪声已经很弱，隧道结中的散粒噪声成为主要噪声源。这时，就要考虑散粒噪声。

由公式(4.22)，散粒噪声电压频谱密度S_V^I为：

$$S_V^I=\frac{d\overline{V}^2}{df}=\frac{d\overline{I}^2}{df}\left(\frac{R}{2}\right)^2=2e(2I_0)\left(\frac{R}{2}\right)^2=eI_0R^2 \tag{4.47}$$

由式(4.22)、(4.47)、(4.36)、(4.35)，可以得到散粒噪声电压和散粒噪声环流相应的磁通噪声频谱密度，并进而求得相应的固有能量分辨率为：

$$\frac{S_\phi}{2L}\approx\frac{3}{8}h\beta' \quad \left(\beta'\gg 1,\ \frac{K_BT}{eI_0R}\ll 1\text{ 时}\right) \tag{4.48}$$

$$\frac{S_\phi}{2L}\approx\frac{h}{8\beta'} \quad \left(\beta'\ll 1,\ \frac{K_BT}{eI_0R}\ll 1\text{ 时}\right) \tag{4.49}$$

按照推导式(4.44)的步骤，还可以得到，

$$\left(\frac{S_\phi}{2L}\right)_{min}\approx h \quad (\beta'\approx 1,\ \frac{K_BT}{eI_0R}\ll 1\text{时}) \tag{4.50}$$

此式表明，DC-SQUID的固有能量分辨率可以接近于量子力学的测不准关系所规定的数量级。令耦合系数k取最大值，即$k=1$，则由式(4.50)和(4.46)得到，为使ε达到量子力学极限，L、C、T应当满足下式：

$$17K_BT(LC)^{1/2}\leqslant h$$

如果$T=4.2$K，$L=0.35\times10^{-9}$H，则$C\leqslant10^{-2}$pF，或者要求隧道结的面积小于10^{-15}m^2，这可以用电子束曝光法获得。由式(4.43)，$L=0.35\times10^{-9}$H时，所需要的I_0约为3μA。再由式(4.45)可得R约为100Ω，这个L值和C值相应的谐振频率$\frac{1}{2\pi(LC)^{1/2}}\approx10^{11}$Hz。

这个频率虽然小于超导能隙相应的频率，但由于其他弛豫过程的影响，DC-SQUID并不能工作在这样高的频率。这就是说，工作在4.2K的具有上述参数的DC-SQUID无论如何也不能达到量子力学测不准关系所规定的极限能量分辨率。欲达到这个极限能量分辨率，必须降低DC-SQUID的工作温度，比如对于$L=0.35\times10^{-9}$H、$C=1$pF的DC-SQUID，工作温度必须小于0.4K。

九、$\frac{1}{f}$噪声[9,10]

$\frac{1}{f}$噪声来源于温度涨落。由热力学知温度为TK的物体，其温度涨落ΔT为：

$$(\Delta T)^2 = \frac{K_B T^2}{C_V}$$

式中C_V为该物体的热容，温度涨落相应的噪声频谱密度$S_T(f)$应当满足以下归一化条件：

$$\int_0^\infty S_T(f)df = \frac{K_B T^2}{C_V}$$

如果$S_T(f)$正比于$1/f$，则归一化条件不能得到满足。为此，人们假定在频率大于f_1的范围内，随着f的增加，$S_T(f)$的衰减很快。在频率小于f_2的范围内，$S_T(f)$和f无关。在f_2和f_1之间，$S_T(f)$由下式表示，

$$S_T(f) = \frac{K_B T^2}{GC_V f}$$

式中G和f_1/f_2的大小有关，约等于2π。

对于超导结，温度涨落导致临界电流的涨落，超导结偏置在电压态时，又会导致结电压涨落。

在DC-SQUID中，超导结的温度涨落又导致磁通涨落。设超导结温度变化δT，相应的临界电流变化为δI_0，则恒流源偏置的DC-SQUID环中的磁通涨落为$\delta I_0 L$，其中L为环电感。DC-SQUID环中的两个超导结的温度涨落是相互独立的，于是，相应的磁通噪声频谱密度为：

$$S_\phi = 2S_T\left(\frac{dI_0}{dT}\right)^2 L^2$$

考虑到式(4.17)，则上式成为：

$$S_\phi = \frac{S_T\phi_0^2}{2}\left(\frac{d\beta'}{dT}\right)^2$$

固有能量分辨率为：

$$\frac{S_\phi}{2L} = \frac{S_T\phi_0^2}{4L}\left(\frac{d\beta'}{dT}\right)^2 \approx \frac{K_B T^2\phi_0^2}{8\pi f C_V L}\left(\frac{d\beta'}{dT}\right)^2$$

将热容C_V改写为：

$$C_V = k_1 C$$

式中C为结电容，k_1为单位面积的结热容和结电容之比，则得，

$$\frac{S_\phi}{2L} = \frac{K_B T^2\phi_0^2}{8\pi f k_1 LC}\left(\frac{d\beta'}{dT}\right)^2$$

对于最佳设计即$\beta' = 1$，$\beta_c = \frac{2\pi I_0 R^2 C}{\phi_0} \approx 1$时，

$$\frac{S_\phi}{2L} \approx \frac{K_B T^2 (I_0 R)^2}{2k_1 f}\left(\frac{d\beta'}{dT}\right)^2 \qquad (4.51)$$

可以看出，$\frac{S_\phi}{2L}$取决于隧道结材料及I_0R。I_0R愈大，则$\frac{1}{f}$噪声造成的能量分辨率愈差。

对于前述的圆柱形薄膜隧道结 DC-SQUID（结面积为 $10^4\mu m^2$，$I_0R=1\mu V$，$k_1=6\times10^{13}JK^{-1}F^{-1}$，$\frac{d\beta'}{dT}\approx0.3K^{-1}$），$\frac{S_\phi}{2L}$的计算值比测量值大 100 倍。而对于小面积隧道结 DC-SQUID(结面积为 $10\mu m^2$)，计算值和测量值一致。图 4.14 示出按式(4.51) 计算的曲线。

由式(4.44)、(4.50)和(4.51)，可以得到包括热噪声、散粒噪声、$1/f$ 噪声的固有能量分辨率公式为：

$$\frac{S_\phi}{2L}\approx\frac{hK_BT}{eI_0R}\left[2+\frac{f_0}{f}\right]+h$$

其中

$$f_0=\frac{T(I_0R)^3}{4k_1\phi_0}\left(\frac{d\beta'}{dT}\right)^2$$

可以看出，当 I_0R 取最佳值时，才能使 $\frac{S_\phi}{2L}$极小。

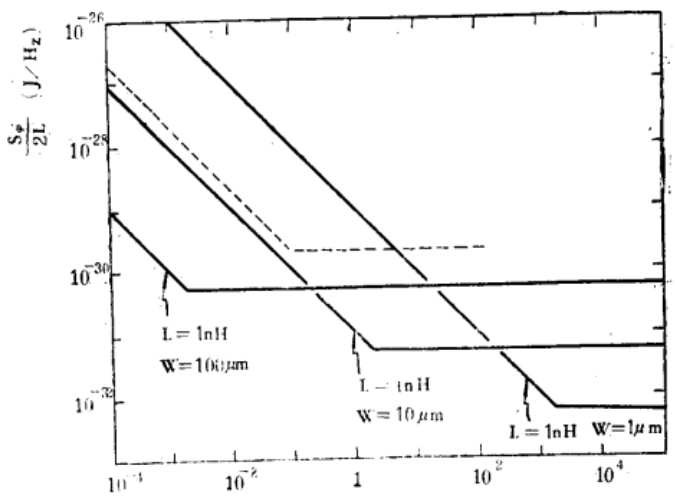


图 4.14　利用式(4.51)计算的固有能量分辨率[9]
L：环电感 W：隧道结边长，结电容 C 为 $0.04pF/\mu m^2$
虚线表示圆柱形薄膜隧道结 DC-SQUID 的 $S_\phi/2L$ 测量值。

§4.3　测量电路

DC-SQUID 用作磁检测器时和 RF-SQUID 一样，常用磁通锁定式线路，如图 4.15所示。它利用 LC 谐振电路把 DC-SQUID 环和室温电路紧密地耦合起来，使得性能远比早期的直接耦合电路、变压器耦合电路优越。该谐振电路的品质因数 Q 为：

$$Q=\frac{\omega_0L_T}{R_T}\qquad(4.52)$$

式中 ω_0 为谐振电路的谐振频率，$\omega_0=(L_TC_T)^{-1/2}$，L_T、C_T、R_T 分别为谐振电路的自感、电容及等效电阻。R_T 约等于 DC-SQUID 环的微分电阻 R_D。谐振电路的阻抗为 Q^2R_D，Q可以做到 200 多，于是，DC-SQUID 的等效阻抗就增加到几十 KΩ，与前级放大器可以达到

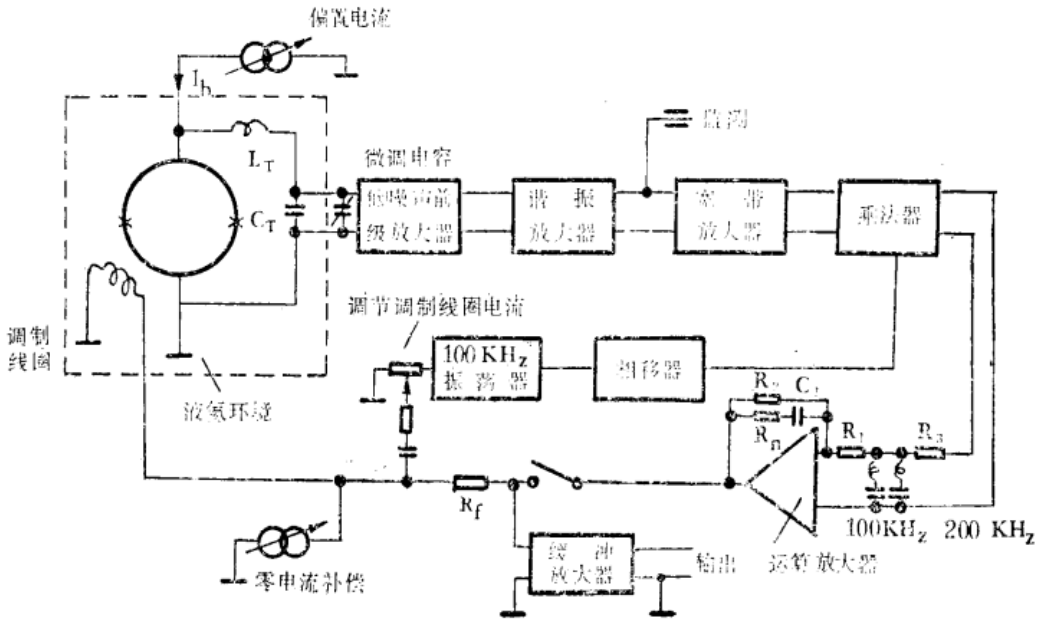


图 4.15　利用 LC 谐振电路把 DC-SQUID 环和室温电路耦合起来

较理想匹配。

现在我们计算谐振电容 C_T 两端的电压及该电压对输入磁通的变化率、该电路的测量范围、频率响应和摆率。

一、谐振电容两端的电压

为简单起见，忽略 DC-SQUID 的直流 I—V 特性曲线的噪声变圆现象，假定 I—V 特性曲线的 $V\neq 0$ 部分象单个超导结那样满足以下方程式：

$$V=(I_b^2-I_c^2)^{1/2} \tag{4.53}$$

式中 I_b 为直流偏置电流，I_c 为 DC-SQUID 的临界电流。由于 SQUID 环中的磁通是频率为 ω_0 的调制磁通，故 I_c 是时间的函数。同时还假定 I_c—ϕ_e 曲线是三角形的，它的方程式为：

$$I_c=\begin{cases} I_m+2\Delta I_c\left[\dfrac{\phi}{\phi_0}-(n+1)\right], & \text{当}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\phi_0\leqslant\phi\leqslant(n+1)\phi_0\text{ 时} \\ I_m-2\Delta I_c\left[\dfrac{\phi}{\phi_0}-n\right], & \text{当 } n\phi_0\leqslant\phi\leqslant\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\phi_0\text{ 时} \end{cases} \tag{4.54}$$

式中 I_m 和 ΔI_c 分别为临界电流的最大值和电流调制深度，ϕ 为外磁通 ϕ_e 及调制磁通之和，即

$$\phi=\phi_e+\phi_m\cos\omega_0 t \tag{4.55}$$

因为 L_TC_T 谐振电路对 DC-SQUID 环有着低阻抗，直流偏置电流 I_b 的大部分流入谐振电路，设流经 DC-SQUID 的电流为 $I_s(t)$，则流经谐振电路的电流为$[I_b-I_s(t)]$，电容 C_T 两端的电压 $v_c(t)$ 满足方程式：

$$L_TC_T\ddot{v}_c+v_c=R_D(I_s^2-I_c^2)^{1/2} \tag{4.56}$$

式中

$$I_s = I_b - C_T \dot{v}_c \tag{4.57}$$

$\dot{v}_c$ 和 $\ddot{v}_c$ 分别为 $v_c(t)$对时间的一阶和二阶导数。

式(4.56)是一个比较复杂的微分方程式，不易求得严格解，但可得到近似解。因为 I_c 是时间的周期性函数，含有频率为 ω_0 的基波分量及许多谐波分量。又因谐振电路的谐振频率为 ω_0，故频率为 ω_0 的信号很强，其他谐波分量很弱，于是，可以假定 I_c 中只含有基波分量。令

$$I_c^2(t) = a_0 + a_1 \cos\omega_0 t \tag{4.58}$$

同理，假定 $v_c(t)$也只有基波分量：

$$V_c(t) = V_c \cos(\omega_0 t + \theta_0) \tag{4.59}$$

由式(4.56)～(4.59)，可以求出 V_c 和 θ_0，

$$V_c = \frac{\omega_0 L_T a_1}{2I_b} \tag{4.60}$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

可以看出，$v_c(t)$的振幅 V_c 和 R_D 无关，$v_c(t)$的位相比调制磁通的位相超前 $\pi/2$。

再计算 a_1。由式(4.54)和(4.55)可以算出 $I_c^2(t)$，再与式(4.58)相比较，即可得到，

$$a_1 = \begin{cases} 4\Delta I_c \dfrac{\phi_m}{\phi_0}\left\{ I_m + 2\Delta I_c \left[\dfrac{\phi_e}{\phi_0} - (n+1) \right] \right\}, & \text{当} \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\phi_0 \leqslant \phi_e + \phi_m \cos\omega_0 t \leqslant (n+1)\phi_0 \text{ 时} \\ 4\Delta I_c \dfrac{\phi_m}{\phi_0}\left[-I_m + 2\Delta I_c \left(\dfrac{\phi_e}{\phi_0} - n \right) \right], & \text{当 } n\phi_0 \leqslant \phi_e + \phi_m \cos\omega_0 t \leqslant \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\phi_0 \text{ 时} \end{cases} \tag{4.61}$$

由 I_c—ϕ_e 曲线可知，上式的第一个式子在 $\dfrac{\phi_m}{\phi_0} = \dfrac{1}{4}$，$\dfrac{\phi_e}{\phi_0} = n + \dfrac{3}{4}$ 时取极大值，第二个式子在 $\dfrac{\phi_m}{\phi_0} = \dfrac{1}{4}$，$\dfrac{\phi_e}{\phi_0} = n + \dfrac{1}{4}$ 时取极大值，极大值分别为：

$$a_{1\max} = \begin{cases} \Delta I_c \left(I_m - \dfrac{\Delta I_c}{2} \right) \\ -\Delta I_c \left(I_m - \dfrac{\Delta I_c}{2} \right) \end{cases} \tag{4.62}$$

由式(4.62)和(4.60)，得

$$V_{c\max} = \frac{\omega_0 L_T \Delta I_c}{2I_b}\left(I_m - \frac{\Delta I_c}{2} \right) \tag{4.63}$$

考虑到 $\beta' \approx 1$ 时，$\Delta I_c \approx \phi_0/2L$，则得，

$$V_{c\max} = \frac{\omega_0 L_T \phi_0}{4L}\left(\frac{I_m}{I_b} - \frac{\phi_0}{4LI_b} \right) \tag{4.64}$$

由式(4.60)、(4.61)、(4.64)可以得到谐振电容两端电压振幅对输入磁通的变化率 $\left(\dfrac{dV_c}{d\phi_e}\right)_{I_b}$ 为：

$$\left|\left(\frac{dV_c}{d\phi_e}\right)_{I_b}\right| = \frac{\omega_0 L_T \phi_0}{4I_b L^2} = \frac{V_{c\max}}{LI_m - \phi_0/4} \tag{4.65}$$

由此式算得的$\left(\frac{dV_c}{d\phi_e}\right)_{I_b}$比精确公式的计算结果小几倍。精确公式为：

$$\left|\left(\frac{dV_c}{d\phi_e}\right)_{I_b}\right| = \frac{16V_{c\max}}{\pi\phi_0} \tag{4.66}$$

由式(4.64)和(4.66)算出的 $V_{c\max}$、$\left(\frac{dV_c}{d\phi_e}\right)_{I_b}$ 与测量值可相差一倍，这是因为推导过程中作了一些简化假定。实际上总是通过调整直流偏置电流 I_b 使 V_c 最大。V_c 的实际最大值相应的最佳偏置电流约为 $1.3I_m$，即 $I_b/I_m = 1.3$。知道 I_b/I_m 后，便可以计算该 DC-SQUID 探头的参数。如果取 $I_b/I_m = 1.3$，$I_m = 4\mu A$，$\nu_0 = 2\pi\omega_0 = 100KHz$，$L = 10^{-9}H$，$L_T = 200\mu H$，则得 $R_D \approx 1\Omega$，$Q \approx 125$，$V_{c\max} = 40\mu V$，$\left(\frac{dV_c}{d\phi_e}\right)_{I_b} = 200\mu V/\phi_0$。

二、频率响应和摆率

谐振电路输出的 $\nu_0 = 100KHz$ 的信号经三级放大。第一级是低噪声场效应管放大器，宽带增益为 100。第二级是谐振放大器，谐振频率为 100KHz，品质因数为 3，增益为100。第三级是宽带放大器，增益在 0 到 300 之间可调。三级放大后的信号输给乘法器即相敏检波器，它的参考信号由 100 KHz 振荡器输出信号经 90° 相移而得到。乘法器输出频率为 0、200KHz 及少量 100KHz 的信号。100KHz 和 200KHz 信号由 L、C 串联电路滤掉。0 频率信号送入由运算放大器、电阻 R_1、R_2、R_n 及电容 C_I 组成的积分器。电阻 R_2 为运算放大器输入和输出间的泄漏电阻，R_n 为中和电阻。积分器的输出电压加在反馈电阻 R_f 及调制线圈上。调制线圈中的电流产生的磁通和外磁通的变化量大小相等、正负相反时，相敏检波器的输出变为零，积分器的输出电压不变化。此电压经缓冲放大器送入指示或记录仪器，显示出外磁通的变化量。

这个电路的频率响应由环路总增益及各级放大器的相移决定，可用以下时间常数表征：谐振电路的时间常数 $\tau_T = \frac{Q}{\pi\nu_0}$、中和电路的时间常数 $\tau_n = R_nC_I$、有效积分时间常数 $\tau_I = 2R_1C_I$。谐振放大器及 LC 滤波电路的有限带宽产生的附加时间常数不太重要。

如果加到 DC-SQUID 环孔中的外磁通 ϕ_e 的圆频率为 ω，则相应的反馈磁通 ϕ_f 为：

$$\phi_f = \frac{G(\omega)\phi_e}{1+G(\omega)} \qquad \left(|\phi_e - \phi_f| \leqslant \frac{\phi_0}{2}\right) \tag{4.67}$$

式中 $G(\omega)$ 为小信号环路总增益。

对于大于几 Hz 的频率，积分器的增益为：

$$g(\omega) = \frac{1+j\omega\tau_n}{j\omega\tau_I} \tag{4.68}$$

于是，

$$G(\omega) = \frac{g(1+j\omega\tau_n)}{j\omega\tau_I(1+j\omega\tau_T)} \tag{4.69}$$

式中 g 为 $\omega = 0$ 时除积分器以外的环路增益，

$$g = \left(\frac{dV_c}{d\phi_e}\right)_{I_b} g_a(\omega_0) g_m \frac{d\phi_f}{dV_f} \tag{4.70}$$

$g_a(\omega_0)$是前级放大器输入端到乘法器输入端的各电路对于100KHz信号的增益，g_m为乘法器的增益，$\frac{d\phi_f}{dV_f}$为反向传递函数，

$$\frac{d\phi_f}{dV_f}=\frac{M_f}{R_f} \tag{4.71}$$

M_f为调制线圈和DC-SQUID环间的互感。

反馈电压V_f和频率ω的关系为：

$$\left|\frac{V_f(\omega)}{V_f(0)}\right|=\left|\frac{G(\omega)}{1+G(\omega)}\right|$$

$$=\left\{1+\frac{\omega^2\tau_I^2}{g^2(1+\omega^2\tau_n^2)}\left[1+\omega^2\tau_T^2-\frac{2g}{\tau_I}(\tau_T-\tau_n)\right]\right\}^{-1/2} \tag{4.72}$$

为了使反馈磁通ϕ_f小于100KHz磁通振幅ϕ_m，就要求

$$|V_f(\omega_0)|\leqslant 2^{-1/2}|V_f(0)| \tag{4.73}$$

$\omega=\omega_0$时，式(4.72)中的ω^4项起主要作用。忽略其他项，再利用式(4.73)，可以导出，

$$\frac{\omega_0\tau_I\tau_T}{g\tau_n}\geqslant 1 \qquad (\omega_0\tau_T,\ \omega\tau_n\gg 1) \tag{4.74}$$

此式表明，对于给定的τ_I、τ_T、τ_n，g有一个上限。

由式(4.72)，在低频时，$\left|\frac{V_f(\omega)}{V_f(0)}\right|=1$。当$\omega$增加时，$\left|\frac{V_f(\omega)}{V_f(0)}\right|$随之增加，到达极大值后，又逐渐减小到0。极大值相应的频率ω_p由下式表示，

$$\omega_p^2=\frac{1}{\tau_n^2}\left\{\left[1+\frac{2g\tau_n^2(\tau_T-\tau_n)}{\tau_I\tau_T^2}-\left(\frac{\tau_n}{\tau_T}\right)^2\right]^{1/2}-1\right\} \tag{4.75}$$

在$\tau_n\to 0$的极限情况下，

$$\omega_p=\left(\frac{g}{\tau_I\tau_T}\right)^{1/2}$$

$$\left|\frac{V_f(\omega)}{V_f(0)}\right|=\left(\frac{\tau_T g}{\tau_I}\right)^{1/2}$$

τ_n从0增加时，ω_p减小，$\left|\frac{V_f(\omega)}{V_f(0)}\right|$也减小。$\tau_n\approx\tau_T$时，$\omega_p=0$，$\frac{V_f(\omega)}{V_f(0)}$—$\omega$曲线上没有峰。在实际上，选取的$\tau_n$约比$\tau_T$小二倍，这时，电路中的高频噪声不会反馈到DC-SQUID中去。这样以来，$\frac{V_f(\omega)}{V_f(0)}$—$\omega$曲线总有一个峰。为了使得峰值小而频率响应又好，$\tau_T$应当尽量地小。正是这个原因，实选$Q=125$，而不是265。$Q=265$时，谐振电路和前级放大器间有着最佳匹配。

和RF-SQUID一样，DC-SQUID的摆率是DC-SQUID闭环磁通锁定电路不失锁时的最大输入磁通变化率。摆率和电路的程式、参数及噪声有关。在忽略噪声的情况下，由式(4.67)、(4.72)可以求得摆率$S(\phi_0/S)$为：

$$S\approx\frac{\pi^2\tau_T}{8\tau_n}\nu_0 \qquad (\omega_0\tau_T,\ \omega_0\tau_n\gg 1) \tag{4.76}$$

取$\frac{\tau_T}{\tau_n}=2$，$\nu_0=100\text{KHz}$，则$S=2.6\times10^5\phi_0/S$。

三、前级放大器的噪声

前面我们讨论了 DC-SQUID 环的热噪声、散粒噪声、$\frac{1}{f}$噪声及能量分辨率。在这个讨论中没有计及放大器的噪声、放大器和 DC-SQUID 环间的耦合电路对噪声的影响，而这些问题对于估计 DC-SQUID 系统的性能是必要的。现在就来研究这个问题。

单个超导结在非零电压区域的伏安特性曲线遵从下面的公式，

$$v = r(i^2 - i_c^2)^{1/2}$$

式中 r 和 i_c 为结电阻和临界电流。微分电阻 r_D 为：

$$r_D = \left(\frac{\partial v}{\partial i}\right) = r\left[1 - \left(\frac{i_c}{i}\right)^2\right]^{-1/2}$$

热电压噪声频谱密度 S_v 为

$$S_v = \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{i_c}{i}\right)^2\right]\frac{4K_BTr_D^2}{r}$$

DC-SQUID 环中的超导结的热电压噪声在频带 $\left[\nu_0\left(1 - \frac{1}{2Q}\right),\ \nu_0\left(1 + \frac{1}{2Q}\right)\right]$，折合到前级放大器输入端的电压噪声频谱密度 B_v 为：

$$B_v = Q^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{I_m}{I_b}\right)^2\right]\frac{4K_BTR_D^2}{R} \tag{4.77}$$

式中 R_D 为 DC-SQUID 环的微分电阻，R 为偏置电流 I_b 比 I_m 大很多时 DC-SQUID 环的电阻。环流噪声产生的磁通噪声频谱密度 B_ϕ 为：

$$B_\phi = \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{I_m}{I_c}\right)^2\right]\frac{K_BTL^2}{R} \tag{4.78}$$

再来讨论前级放大器的噪声。对于 10KHz～100KHz的调制磁通频率，前级放大器的$\frac{1}{f}$噪声可以忽略。场效应管前级放大器输入级的噪声可以用两个噪声源来描述。一个是电压噪声源，设它的频谱密度为 F_V；另一个是电流噪声源，设它的频谱密度为 F_c，这两个噪声折合到前级放大器输入端的电压噪声频谱密度 S_A 为：

$$S_A = F_V + Q^4R_D^2F_c \tag{4.79}$$

再把 DC-SQUID 环的噪声考虑进去，得到前级放大器输入端的总电压噪声频谱密度 S_V 为：

$$S_V = B_V + S_A \tag{4.80}$$

四、磁通噪声

为了推导DC-SQUID系统的磁通噪声公式，需要注意锁定电路的特点：加入DC-SQUID环的外磁通被 $\phi_m \cos 2\pi\nu_0 t$ 的余弦磁通调制；DC-SQUID 输给谐振电路谐振频率为 ν_0、带宽为 $2B = \frac{\nu_0}{Q}$的信号；谐振电容两端的电压，经放大后，由乘法器解调。乘法器的参考信号与调制磁通同频率，但位相差 $\pi/2$；乘法器输出经滤波，仅将频率从 0 到 B 的信号送入积分电路。

DC-SQUID 开环运行时，电压噪声和磁通噪声在乘法器输出端产生频率在 $\nu = f(0 \leqslant f$

$\leqslant \frac{\nu_0}{2Q}$)附近带宽为 df 的总方均电压$P_n(f)$：

$$P_n(f) = P_n^V(f) + P_n^\phi(f) \tag{4.81}$$

$P_n^V(f)$和 $P_n^\phi(f)$为电压噪声和磁通噪声在乘法器输出端产生的在 df 内的方均电压噪 声， 与 $P_n(f)$相应的等效方均磁通噪声频谱密度即为待求的磁通噪声 S_ϕ。计算结果指出，

$$P_n^V(f) = \frac{1}{2} g^2 S_V df \tag{4.82}$$

$$P_n^\phi(f) = \frac{3}{8} g^2 \left(\frac{dV_c}{d\phi_e}\right)_{I_b}^2 B_\phi df \tag{4.83}$$

DC-SQUID 闭环运行时，

$$P_n(f) = \frac{1}{4} \left(\frac{dV_c}{d\phi_e}\right)_{I_b}^2 g^2 S_\phi df \tag{4.84}$$

由式(4.81)～(4.84)得到磁通噪声频谱密度 S_ϕ 为：

$$S_\phi = 2S_V \left(\frac{dV_c}{d\phi_e}\right)_{I_b}^{-2} + \frac{3}{2} B_\phi \tag{4.85}$$

将 S_V 和 B_ϕ 的表示式(4.80)、(4.78)代入，并注意到 $Q = \frac{\omega_0 L_T}{R_D}$，则式(4.85)成为：

$$S_\phi = 2\left\{\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{I_m}{I_b}\right)^2\right]\frac{4K_B T\omega_0^2 L_T^2}{R} + F_V + \frac{\omega_0^4 L_T^4}{R_D^2} F_c\right\}\left(\frac{dV_c}{d\phi_e}\right)_{I_b}^{-2}$$
$$+ \frac{3}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{I_m}{I_b}\right)^2\right]\frac{K_B T L^2}{R} \tag{4.86}$$

式中$\left(\frac{dV_c}{d\phi_e}\right)_{I_b} \approx \frac{\omega_0 L_T}{L}$。

由此式可以得到 S_ϕ 相对于 L_T 取极小值的条件。对于一给定的DC-SQUID 环、调制磁通频率及前级放大器，S_ϕ 的自变量只是 L_T(当 L_T 变化时，相应的变化 C_T，则可以使谐振频率不变)。大括号中的第一项是 DC-SQUID 环的电压噪声对 S_ϕ 的贡献，它与 L_T 无关。于是，S_ϕ取极小值的条件就转变成$\left(\frac{F_V}{\omega_0^2 L_T^2} + \frac{\omega_0^2 L_T^2}{R_D^2} F_c\right)$取极小值的条件。这个条件为：

$$\frac{F_V}{F_c} = \frac{\omega_0^4 L_T^4}{R_D^2} = Q^4 R_D^2 \tag{4.87}$$

文献[5]中的场效应管前级放大器的 F_V 为 $2\times10^{-13}\mathrm{V^2Hz^{-1}}$，$F_c$ 为$4\times10^{-28}\mathrm{A^2Hz^{-1}}$。DC-SQUID 环的 R_D 约为 1Ω。将这些数据代入式(4.87)，得到 S_ϕ 取极小值的 Q 为 265。正如前面所说的，这时的频率特性曲线上有一个峰，为了减小这个峰值，实选 Q 为 125。

测量结果表明，在频率从 2×10^{-2}Hz 到 200Hz 的范围内，磁通噪声几乎是白噪声，方均根值均为 $3.5\times10^{-5}\phi_0\mathrm{Hz}^{-1/2}$。频率大于 200Hz 时， 磁通噪声急骤减小， 这是因为电路的滤波作用。频率小于 2×10^{-2}Hz 时，主要是 $1/f$ 噪声，它随频率 f 的变化规律为：

$$S_\phi = 10^{-10}\phi_0^2/f$$

五、漂移

实验指出，DC-SQUID 环中的外磁通恒定不变时，闭环磁通锁定电路的输出信号仍然

随着时间缓慢地变化或漂移。产生漂移的原因还不十分清楚，其主要原因是温度变化。有关的测量结果可参考文献[5]。

参 考 文 献

[1] J.E.Zimmerman et al., *Phys. Rev.*, 141, 367(1966)

[2] S.K.Decker et al., *Appl. Phys. Lett.*, 25, 527(1974)

[3] D.W.Palmer et al., *Appl. Phys. Lett.*, 25, 527(1974)

[4] W.Richter et al., *Cryogenics*, 15, 148(1975)

[5] J.Clarke et al., *J. Low Temp. Phys.*, 25, 99(1976)

[6] V.J. de Waal et al., *J. Low Temp. Phys.*, 53, 287(1983)

[7] M.B. Ketchen et al., *Appl.Phys. Lett.*, 40, 736(1982)

[8] C.D. Tesche et al., *J. Low Temp. Phys.*, 37, 397(1679)

[9] J. Clarke, 《*SQUID' 80, superconducting quantum interference devices and their applications*》, Pro. I. C. SQUID 1980, W. de Gruyter, Berlin, 1980, p.187

[10] M.B. Ketchen et al., 同[9], p.227

[11] C.D.Tesche et al., *J.Low Temp. Phys.*, 29, 301 (1977)

第五章　SQUID仪器

§5.1　磁强计

SQUID加上合适的输入电路便构成磁强计。输入电路有谐振式的和非谐振式的两种[1]。非谐振式输入电路是由输入线圈 L_i 和检测线圈 L_p 组成的超导磁通变换器。谐振式输入电路是由输入线圈 L_i、检测线圈 L_p、电容 C_i 及电阻 R_i 组成的串联电路，电阻 R_i 表示电路中的能耗。由于输入电路影响到 SQUID 环的阻抗，并引起 SQUID 环流噪声变化，从而影响 SQUID 系统的分辨率。于是，不能仅仅考虑 SQUID 环和输入线圈 L_i 组合系统的能量分辨率，而应以检测线圈可以检测的最小能量来表征该系统的性能。设外磁感应强度的圆频率为 ω，振幅为 B_0，方向垂直于检测线圈平面，那么，检测线圈接收到的信号能量有效值 U 为：

$$U=\frac{\langle E_i^2\rangle}{2\omega^2 L_p}=\frac{B_0 S^{3/2}}{2\xi\mu_0} \tag{5.1}$$

式中 $\langle E_i^2\rangle$ 为检测线圈中的感应电动势的均方值，S 为检测线圈的截面积，ξ 为和检测线圈形状有关的修正因子。

现在我们推导检测线圈可以检测的最小信号能量。为了得到不仅适用于磁强计而且适用于电压表、磁场梯度计的公式，首先讨论一般输入电路的 DC-SQUID 信噪比。

一、一般输入电路的 DC-SQUID 信噪比

如图 5.1，DC-SQUID 和输入线圈 L_i 之间存在电磁耦合，输入线圈又和电压源 $E_i(t)$ 及源阻抗 z_i 串联成闭合电路，$z_i=R_i+jX_i$。作数值计算时，使用上一章介绍的圆柱形薄膜隧道结 DC-SQUID 的数据：环电感 L 约为1nH，结电阻 R 约为 1Ω，最佳偏置电流 $I_b=1.3I_c$，输入磁通 ϕ_e 约为 $(2n+1)\frac{\phi_0}{4}$，小信号传递函数 $\frac{\partial V}{\partial\phi_e}\approx\frac{R}{L}=10^{9}\mathrm{S}^{-1}$，约瑟夫逊频率 $f_J\approx\frac{R}{10L}=10^{8}\mathrm{Hz}$，输入信号频率比 f_J 小几个数量级，此时孤立 DC-SQUID 环两端的电压噪声 $V_N(t)$ 的频谱密度 $S_V(f)$、环流噪声 $J_N(t)$ 的频谱密度 $S_J(f)$、$V_N(t)$ 和 $J_N(t)$ 的相关噪声频谱密度 $S_{JV}(f)$ 由式(4.26)—(4.28)表示，即

$$S_V(f)=2\gamma_V K_B T R \tag{5.2}$$

$$S_J(f)=2\gamma_J K_B T/R \tag{5.3}$$

$$S_{JV}(f)=2\gamma_{JV}K_B T \tag{5.4}$$

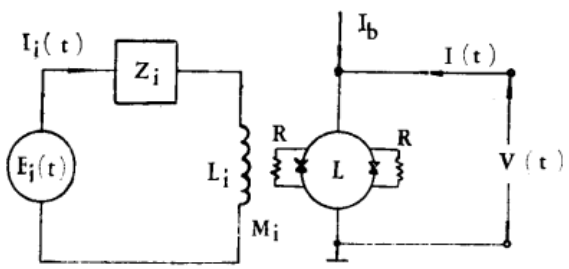


图5.1　一般输入电路和DC-SQUID环耦合

式中 $\gamma_V=\frac{S_v}{2\Gamma}=8$，$\gamma_J=\frac{S_j}{2\Gamma}=5.5$，$\gamma_{JV}=\frac{S_{jv}}{2\Gamma}=6$，$K_B$ 为波尔兹曼常数，T 为绝对温度，Γ 由式(4.24)表示，$\Gamma=0.05$，R 为结电阻。

图 5.1 可等效为图 5.2。虚线方框中的电路表示 DC-SQUID 环。该电路的输入量是输入线圈中的电流 I_i 和磁通 ϕ_i。ϕ_i 和输入线圈两端电压 V_i 的关系为：

$$V_i = j\omega\phi_i$$

输出量是 DC-SQUID 两端的电压 V 和输出电流 I。ϕ_i、I_i、V、I 四个量之间有着函数关系，它们的增量 $\Delta\phi_i$、ΔI_i、ΔV、ΔI 之间也有关系：

$$\begin{pmatrix} \Delta\phi_i \\ \Delta V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta I_i \\ \Delta I \end{pmatrix}$$

式中 $t_{11} = \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial I_i}\right)_I$ 为输入线圈的等效电感。由于输入线圈跟 DC-SQUID 相耦合，该等效电感不等于孤立输入线圈的电感。$\omega \ll R_D/L$ 时，

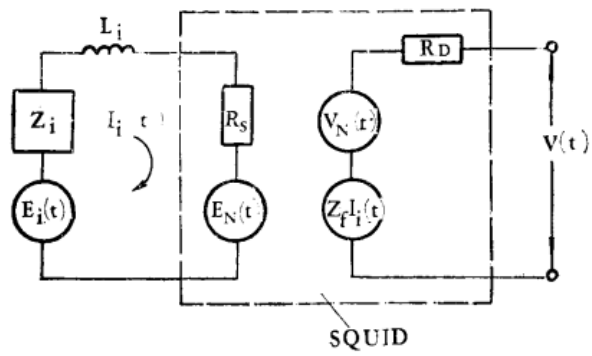


图 5.2 图 5.1 的等效电路

$$t_{11} \approx L_i\left[1 - \frac{k^2}{1 - j4R_D/\omega L}\right] \approx L_i - jk^2\omega LL_i/4R_D \tag{5.5}$$

式中 $R_D \approx R/2$，R 为每个超导结的动态电阻。$t_{12} = \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial I}\right)_{I_i}$ 为反向传递函数，DC-SQUID 的反向传递函数和 RF-SQUID 不同，约等于 0。$t_{21} = \left(\frac{\partial V}{\partial I_i}\right)_I$ 为正向传递函数，它是一个阻抗 z_f，

$$t_{21} = z_f = M_i\frac{\partial V}{\partial\phi_e} \tag{5.6}$$

$t_{22} = \left(\frac{\partial V}{\partial I}\right)_{\phi_i}$ 为 DC-SQUID 的输出动态电阻 R_D，当输入信号频率 ω 比约瑟夫逊频率小很多时，

$$t_{22} = R_D \approx \frac{R}{2} \tag{5.7}$$

环流噪声 $J_N(t)$ 在输入电路中感应的等效电压噪声为：

$$E_N(t) = M_i\frac{dJ_N(t)}{dt} \tag{5.8}$$

$E_N(t)$ 的频谱密度 $S_E(f)$ 为：

$$S_E(f) = \omega^2 M_i^2 S_J(f) \tag{5.9}$$

带输入电路的 DC-SQUID 环两端的电压噪声 $V_N'(t)$ 不同于输入电路开路时 DC-SQUID 环两端的电压噪声 $V_N(t)$，它们间的关系为：

$$V_N'(t) = V_N(t) + M_i\frac{dJ_N}{dt}\frac{z_f}{z_T} \tag{5.10}$$

式中 z_T 为输入电路的总阻抗，

$$z_T \approx z_i + j\omega L_i + \frac{\omega^2 M_i^2}{4R_D} \tag{5.11}$$

$\frac{\omega^2 M_i^2}{4R_D}$ 为 DC-SQUID 环对输入电路阻抗的贡献。

$V_N'(t)$的频谱密度 $S_V'(f)$为：

$$S_V'(f) = 2\gamma_V' K_B T R \tag{5.12}$$

由式(5.10)可以算出 γ_V'，

$$\gamma_V' = \gamma_V + 2\gamma_{IV} k^2 \omega L L_i \frac{\partial V}{\partial \phi_e}(X_i + \omega L_i) \Big/ |z_T|^2 R$$

$$+ \gamma_I k^4 \omega^2 L^2 L_i^2 \left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)^2 \Big/ |z_T|^2 R^2 \tag{5.13}$$

再考虑带输入电路的 DC-SQUID 环和放大器的组合系统。信号 $E_i(t)$在放大器输出端产生的电压方均值$\langle V^2\rangle$为：

$$\langle V^2\rangle = A^2 z_f^2 \langle E_i^2\rangle / |z_T|^2 = A^2 M_i^2 \left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)^2 \langle E_i^2\rangle / |z_T|^2 \tag{5.14}$$

式中A为放大器的增益，$\langle E_i^2\rangle$为输入信号的方均值。放大器的等效电压噪声频谱密度 $S_V(f)$为：

$$S_A(f) = 4K_B T_A R_D \approx 2K_B T_A R \tag{5.15}$$

式中 T_A 为放大器的等效噪声温度。假定放大器本身的电流噪声可以忽略，于是，放大器输出端的电压噪声频谱密度 $S_N(f)$为：

$$S_N(f) = A^2 \cdot 2K_B R\Big[\gamma_V T + T_A + 2\gamma_{IV} T k^2 \omega L L_i \frac{\partial V}{\partial \phi_e}(X_i + \omega L_i) \Big/ |z_T|^2 R +$$

$$+ \gamma_I T k^4 \omega^2 L^2 L_i^2 \left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)^2 \Big/ |z_T|^2 R^2\Big] \tag{5.16}$$

由式(5.14)和(5.16)，得到信噪比为：

$$\frac{\langle V^2\rangle}{S_N(f)B} = \frac{k^2 L L_i \langle E_i^2\rangle \left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)^2}{2K_B |z_T|^2 R B}\Big[\gamma_V T + T_A + \frac{2\gamma_{IV} T k^2 \omega L L_i (X_i + \omega L_i)\frac{\partial V}{\partial \phi_e}}{|z_T|^2 R}$$

$$+ \frac{\gamma_I T k^4 \omega^2 L^2 L_i^2 \left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)^2}{|z_T|^2 R^2}\Big]^{-1} \tag{5.17}$$

式中 B 为该系统的带宽。

式(5.17)是一个普适关系式，可用于磁强计、电压表及磁场梯度计。

二、DC-SQUID磁强计的最小可检测能量

1．非谐振式输入电路的 DC-SQUID 磁强计

对于由输入线圈 L_i 和检测线圈 L_p 组成的非谐振式输入电路，式(5.11)成为：

$$z_T = \omega L_i\Big[\frac{k^2 \omega L}{4R_D} + j\left(1 + \frac{L_p}{L_i}\right)\Big] \tag{5.18}$$

由式(5.1)、(5.17)、(5.18)，并令$\frac{\langle V^2\rangle}{S_N(f)B} = 1$，得到相应的信号能量 U'为：

$$U' = \frac{K_B T R L_i B}{k^2 L L_p \left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)^2}\Bigg\{\gamma_V\Big[\left(\frac{k^2 \omega L}{4R_D}\right)^2 + \left(1 + \frac{L_p}{L_i}\right)^2\Big]$$

$$+\frac{2\gamma_{IV}k^2L\left(1+\frac{L_p}{L_i}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial\phi_e}\right)}{R}+\frac{\gamma_I k^4L^2\left(\frac{\partial V}{\partial\phi_e}\right)^2}{R^2}\Bigg\} \tag{5.19}$$

假定 L_p、k^2 与 L_i 无关。由 $\frac{\partial U'}{\partial L_i}=0$，得到 U' 的极小值 U'_0 及相应的 L_i 即 L_{i0} 为：

$$U'_0=\frac{2\gamma_V K_B TRB}{k^2L\left(\frac{\partial V}{\partial\phi_e}\right)^2}\left\{1+\frac{L_p}{L_{i0}}+\frac{\gamma_{IV}k^2L\left(\frac{\partial V}{\partial\phi_e}\right)}{\gamma_V R}\right\} \tag{5.20}$$

$$L_{i0}=L_p\left[1+\frac{2\gamma_{IV}k^2L\left(\frac{\partial V}{\partial\phi_e}\right)}{\gamma_V R}+\frac{\gamma_I k^4L^2\left(\frac{\partial V}{\partial\phi_e}\right)^2}{\gamma_V R^2}+\left(\frac{k^2\omega L}{4R_D}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{5.21}$$

在 $\frac{\omega}{\omega_J}\ll 1$ 的极限情况下，对于上述的 DC-SQUID 参数值，式(5.20)和(5.21)成为：

$$U'_0=\frac{16K_BTLB}{k^2R}[1+(1+1.5k^2+0.7k^4)^{1/2}+0.75k^2] \tag{5.22}$$

$$L_{i0}=L_p(1+1.5k^2+0.7k^4)^{-1/2} \tag{5.23}$$

对于 $k^2=0.5$ 和典型的 DC-SQUID 参数，

$$U'_0=\frac{9K_BTB}{f_J}\approx 5\times10^{-30}B[\mathrm{J/Hz}] \tag{5.24}$$

$$L_{i0}\approx 0.72\,L_p \tag{5.25}$$

由式(5.1)和(5.20)可知，增加 $S^{3/2}/\xi$ 时，可以提高灵敏度。但检测线圈的截面积 S 不能无限制增加，它显然受杜瓦容器的限制。例如，对于长 0.2m、直径 0.05 m 的螺线管式检测线圈，测量磁感应强度的灵敏度为 $2\times10^{-16}B^{1/2}$ 特斯拉。

2. 谐振式输入电路的 DC-SQUID 磁强计

对于由输入线圈 L_i、检测线圈 L_p、电容 C_i、电阻 R_i 组成的串联谐振式输入电路，式(5.11)成为：

$$z_T=\left(R_i+\frac{k^2LL_i\omega^2}{4R_D}\right)+j\left(\omega L_i+\omega L_p-\frac{1}{\omega C_i}\right) \tag{5.26}$$

放大器输出端的电压噪声频谱密度为：

$$S_N(f)=4K_B(T_i+T_N^*)R_iA^2z_I^2/|z_T|^2 \tag{5.27}$$

式中 T_N^* 为 DC-SQUID 环相应的噪声温度，

$$T_N^*=\frac{\omega^2RL_iT}{2k^2LR_i\left(\frac{\partial V}{\partial\phi_e}\right)^2}\Bigg\{\gamma_V\left[\left(\frac{R_i}{\omega L_i}+\frac{k^2\omega L}{4R_D}\right)^2+\left(1+\frac{L_p}{L_i}-\frac{1}{\omega^2L_iC_i}\right)^2\right]$$

$$+\frac{2\gamma_{IV}k^2L\left(\frac{\partial V}{\partial\phi_e}\right)}{R}\left(1+\frac{L_p}{L_i}-\frac{1}{\omega^2L_iC_i}\right)+\frac{\gamma_I k^2L^2\left(\frac{\partial V}{\partial\phi_e}\right)^2}{R^2}\Bigg\} \tag{5.28}$$

式(5.27)右端第一项是温度 T_i 的电阻 R_i 产生的电压噪声频谱密度；第二项是 DC-SQUID

环的噪声在放大器输出端产生的电压噪声频谱密度，可由式(5.16)和(5.26)得到。在推导过程中假定：$T_A \ll \gamma_V T$，将 T_A 略去，这是因为放大器的有效噪声温度 T_A 约为1K，DC-SQUID的工作温度 T 为 4.2K，$\gamma_V \approx 8$。

放大器输出电压的方均值为：

$$\langle V^2 \rangle = 2\omega^2 U L_p A^2 z_f^2 / |z_T|^2 \tag{5.29}$$

令 $\frac{\langle V^2 \rangle}{S_N(f)B} = 1$，得到使信噪比等于 1 时相应的信号能量 U'' 为：

$$U'' = \frac{2K_B R_i B}{\omega^2 L_p}(T_i + T_N^*) \tag{5.30}$$

对于 $\omega \ll \omega_J$ 的典型 DC-SQUID 系统，T_N^* 远小于 T_i，可以忽略，于是，式(5.30)化简为：

$$U'' = \frac{2K_B T_i R_i B}{\omega^2 L_p} \cdot \frac{2K_B T_i B\left(1 + \frac{L_i}{L_p}\right)}{Q\omega} \tag{5.31}$$

式中 Q 为输入电路的品质因数，

$$Q = \frac{\omega(L_i + L_p)}{R_i} \tag{5.32}$$

式(5.31)表明，U'' 和 DC-SQUID 的参数无关，也和耦合系数 k 无关。

由式(5.32)和(5.24)，得到 $k^2 = 0.5$ 及典型的 DC-SQUID 参数情况下的带谐振式输入电路和带非谐振式输入电路 DC-SQUID 磁强计的最小可检测能量之比为：

$$\frac{U''}{U'} \approx \frac{R_i \omega_J}{9\pi\omega^2 L_p} \approx \frac{\left(1 + \frac{L_i}{L_p}\right)\omega_J}{28Q\omega} \tag{5.33}$$

如果取 $\frac{\omega_J}{\omega} = 10^4$，$\frac{\omega}{2\pi} = 10^4$Hz，$L_i \approx L_p$，则当 $Q > 700$ 时，$\frac{U''}{U'} < 1$。此时的带宽 $\omega/2\pi Q \approx 14$Hz。这就是说，要使谐振式输入电路的 DC-SQUID磁强计的灵敏度比非谐振式输入电路高一个数量级，则需谐振式输入电路开环时的带宽要大于 1Hz，为此，常常利用负反馈来增加带宽。

由式(5.33)还可以看出，对于给定的 Q，ω 愈高，则 $\frac{U''}{U'}$ 愈小，因此，低频时，非谐振式输入电路的 DC-SQUID 磁强计较好，高频($>10^4$Hz)时，谐振式输入电路的 DC-SQUID 磁强计较好。但必须指出，对于工作在高频场合、Q 很大的输入电路，DC-SQUID 环相应的噪声温度 T_N^* 可以接近、甚至大于电阻 R_i 的温度 T_i，式(5.31)和(5.33)不再正确。例如，对于 $T = T_i$，$Q = 1000$，$L_i = L_p$，当 $\omega = \omega_0 = 2\times 10^6$Hz时，$T_N^* = T_i$。当 $\omega \neq \omega_0$ 时 $T_N^* > T_i$。图 5.3 示出 $\gamma_V = 8$，$\gamma_J = 5.5$，$\gamma_{JV} = 6$，$k^2 = 0.5$，$Q_T = \frac{\omega_0(L_i + L_p)}{R_i} = 1000$，$\frac{\partial V}{\partial \phi_e} = \frac{R}{L}$时，以 $\gamma = \frac{L_i}{L_i + L_p}$为参变量的 $\frac{T_N^*}{T} \cdot \frac{R}{\omega_0 L}$——$\frac{\omega}{\omega_0}$ 曲线。

目前，带非谐振式输入电路的 DC-SQUID 磁强计应用较广，输入电路几乎全是用绝缘铌丝做的，铌丝直径约为 100 μm。输入线圈 L_i 与 SQUID 牢固地粘在一起，用以消除震动影响，检测线圈通常绕在石英棒骨架上，它的位置要严格固定，不许震动。检测线圈和输

入线圈之间的连线需要扭绞，并进行超导屏蔽。

三、实用电路

DC-SQUID 或 RF-SQUID 磁强计的电路有模拟式、数字式、模拟和数字式相组合等几种型式。

模拟式磁强计的电路为磁通锁定式自动补偿电路加上输入电路，输入电路的检测线圈置于待测磁场中。这种磁强计可以用来测量磁感应强度的微小变化，灵敏度已达 $10^{-16}\mathrm{THz}^{-1/2}$。

数字式磁强计的原理很简单。加到检测线圈中的待测磁场从零增加时，DC-SQUID 环两端的电压或 RF-SQUID 谐振电路两端的电压发生周期性变化，电压每变化一个周期就表示SQUID环孔中的磁通量变化 ϕ_0。根据输入电路的磁通变换系数便可得到加到检测线圈中的外磁通量，再由检测线圈的匝数、面积、形状，得到外磁感应强度。通常是用实验方法标定磁强计，即测定SQUID输出电压变化一个周期所相应的检测线圈中的外磁场变化量。可以看出，这种测量归结为利用脉冲放大器及计数器测量 SQUID 输出电压的振荡次数，SQUID 实际上是一个将外磁场转变为脉冲的模数转换器。

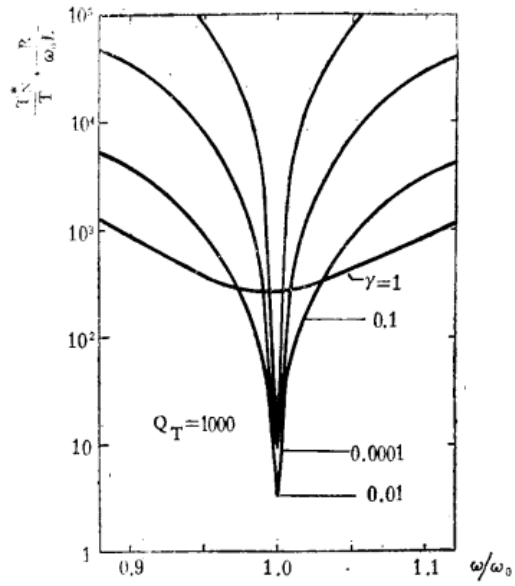


图 5.3 谐振式输入电的 DC-SQUID 磁强计的 $T_N^{\bullet}\cdot\frac{R}{\omega_0 L}/T-\frac{\omega}{\omega_0}$ 曲线

数字式磁强计的测量范围很大，但灵敏度较磁通锁定式磁强计低几个数量级，这是因为被测磁场在 SQUID 环孔中产生的磁通一般不会刚好等于 $n\phi_0$，剩下的零头将作为误差处理。为了提高测量精确度和灵敏度，可以将锁定式磁强计和数字式磁强计电路组合起来，作到既测 ϕ_0 的整数倍部分又测零头。

数字式磁强计对于单调变化的磁场行之有效，而对于起伏变化的磁场则因不管磁场增加还是减小都会使 SQUID 输出电压周期性变化，上述电路不能分辨它们，计数很大而磁场不一定很高。因此，对于起伏变化的磁场，必须设法使对磁场增加引起的脉冲进行加法计数，对磁场减小引起的脉冲进行减法计数。

文献[2]介绍了这样的电路。它由两大部分组成。第一部分的作用是：从 SQUID 的输出电压信号中得到两个位相差为 90° 的信号。第二部分的作用是：将磁场增加引起的脉冲和磁场减小引起的脉冲分开，分别送入可逆计数器。

图 5.4 示出第一部分电路。它也是利用音频磁场进行调制的，设为

$$\phi = \phi_m \cos \omega_0 t$$

如第三章所说，SQUID 环的输出电压为：

$$V(t) = v_0 + \sum_{i=1}^{\infty} v_i \cos i\omega_0 t$$

v_1 为 ϕ_e 的正弦函数，v_2 为 ϕ_e 的余弦函数，周期都是 $1\phi_0$，两者的位相差为 90°，这个电压

经变压器耦合到放大器，放大后的信号送入相敏检波器 1 和 2 。相敏检波器 1 利用音频振荡

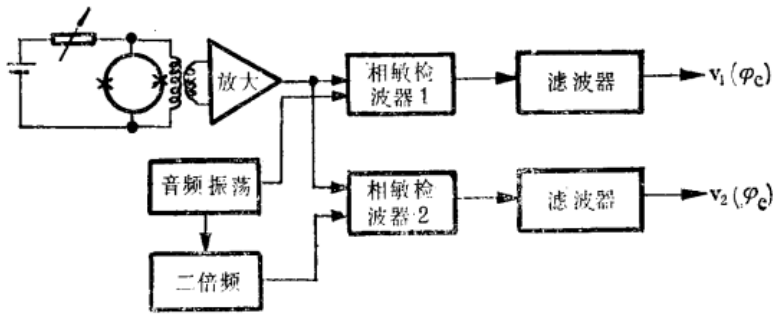


图 5.4　文献[2]介绍的数字式磁强计的第一部分电路

器的信号作为参考信号，直接检出基波包络 $v_1(\phi_e)$。相敏检波器 2 利用倍频后的信号作为参考信号，检出二次谐波信号 $v_2(\phi_e)$。$v_1(\phi_e)$ 和 $v_2(\phi_e)$ 相对于 ϕ_e 的位相差为 90°，正好满足要求，分别送入电路的第二部分。

电路的第二部分如图 5.5 所示。信号 $v_1(\phi_e)$ 经放大、倒向、钳位电路成为 V_1'。用 V_1' 作为双稳态触发器的集电极电源，信号 $v_2(\phi_e)$ 经另一路放大、倒向、钳位电路成为 V_2'。用 V_2' 控制双稳态触发器的状态翻转。

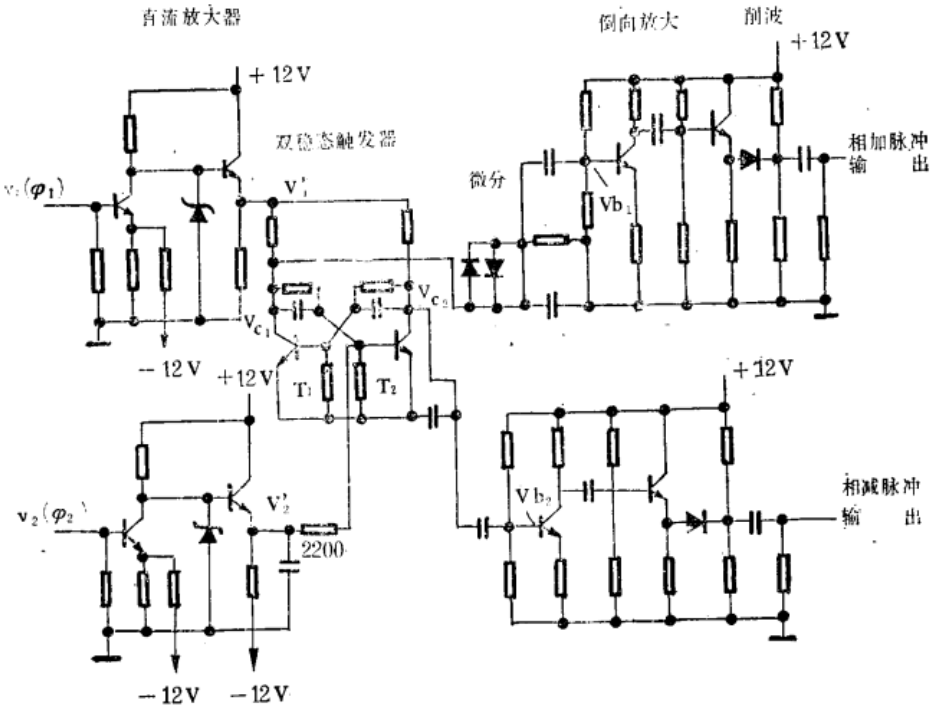


图 5.5　文献[2]介绍的数字式磁强计的第二部分电路

先看 ϕ_e 增加时的情况。ϕ_e 从 $n\phi_0$ 增至 $(n+1)\phi_0$ 的过程中，双稳态触发器翻转一次。晶体管 T_1 集电极输出一个前沿缓慢变化而后沿很陡的脉冲，此脉冲经微分后成为一个小的正脉冲及一个很大的负脉冲，经放大、倒向后送到削波电路。削波电路只允许大的正脉冲通过，于是第一路有脉冲输出。这个脉冲经过成形器后送入可逆计数器进行加法计数。而晶体

管 T_2 集电极输出的脉冲经过微分后成为一个很大的正脉冲及一个小的负脉冲，它们均不能通过削波电路，因而第二路没有输出。

再看 ϕ_e 减小时的情况。ϕ_e 从 $(n+1)\phi_0$ 回到 $n\phi_0$ 的过程中，双稳态触发器再翻转一次，T_2 输出脉冲经微分成为一个很大的负脉冲及很小的正脉冲。这个负脉冲可以通过削波电路，送入可逆计数器进行减法计数。而 T_1 输出的脉冲经微分器后成为一个大的正脉冲及小的负脉冲，它们均不能通过削波电路，因而第一路没有输出。

因为从第一路输出一个脉冲，可逆计数器的示数增加 1。由第二路输出一个脉冲，可逆计数器的示数减小 1，所以，它的实际计数就表示 ϕ_e 的实际变化周期。

文献[2]指出，该磁强计每秒可测 2000 个周期。

关于磁强计的资料可以参阅文献[3-7]。

§5.2 电 压 表

电压表的最重要性能指标是它的噪声温度 T_N，T_N 是这样定义的，令式(5.17)的 $\frac{\langle V^2\rangle}{S_N(f)B}=1$，得到最小可检测电动势方均值 $\langle E_i^2\rangle$，进而得到 T_N，

$$\langle E_i^2\rangle = 4K_B T_N R_i B \tag{5.33}$$

$$T_N = \frac{\omega^2 R L_i}{2k^2 L R_i\left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)^2}\left[\frac{(\gamma_V T + T_A)\,|z_T|^2}{(\omega L_i)^2} + \frac{2\gamma_{JV}T\left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)}{R}\right.$$

$$\left.\cdot\left(1+\frac{X_i}{\omega L_i}\right)+\frac{\gamma_J k^4 L^2 T\left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)^2}{R^2}\right] \tag{5.34}$$

式(5.34)是一般输入电路的 SQUID 电压表噪声温度的表示式，下面我们分谐振式输入电路和非谐振式输入电路两种情况进行讨论。

一、谐振式输入电路 DC-SQUID 电压表

该输入电路由输入线圈 L_i、电容 C_i 及待测电动势 $E_i(t)$ 及电源电阻 R_i 串联而成。对此输入电路，假定 $T_A \ll \gamma_V T$，则式(5.34)成为：

$$T_N = \frac{\omega^2 R L_i T}{2k^2 L R_i\left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)^2}\left\{\gamma_V\left[\left(\frac{R_i}{\omega L_i}+\frac{k^2\omega L}{4R_D}\right)^2+\left(1-\frac{1}{\omega^2 L_i C_i}\right)^2\right]\right.$$

$$\left.+\frac{2\gamma_{JV}k^2 L\left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)}{R}\left(1-\frac{1}{\omega^2 L_i C_i}\right)+\frac{\gamma_J k^4 L^2\left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)^2}{R^2}\right\} \tag{5.35}$$

此式和式(5.28)的区别在于不含 $\frac{L_p}{L_i}$ 的项。由 $\frac{\partial T_N}{\partial C_i}=0$ 可得 T_N 对于 C_i 的极小值 T_{NC} 及相应的 C_i 即 C_{i0} 为：

$$\frac{1}{\omega C_{i0}} = \omega L_i \left[1 + \frac{\gamma_{JV} k^2 L \left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)}{\gamma_V R}\right] \tag{5.36}$$

$$T_{NC} = \frac{\omega^2 R L_i T}{2k^2 L R_i \left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)^2}\left[\gamma_V\left(\frac{R_i}{\omega L_i} + \frac{k^2 \omega L}{4R_D}\right)^2 + \frac{k^4 L^2 \left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)^2}{\gamma_V R^2}(\gamma_V\gamma_J - \gamma_{JV}^2)\right] \tag{5.37}$$

由 $\frac{\partial T_N}{\partial R_i} = 0$，可得 T_N 对于 R_i 的极小值 T_{N0} 及相应的 R_i 即 R_{i0} 的表示式。再利用式 (5.36) 将其中的 C_i 消去，得到，

$$R_{i0} = k^2 \omega L_i \left[\left(\frac{\omega L}{4R_D}\right)^2 + \frac{L^2}{\gamma_V^2 R^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)^2 (\gamma_V\gamma_J - \gamma_{JV}^2)\right]^{1/2} \tag{5.38}$$

$$T_{N0} = \frac{\gamma_V \omega R T}{k^2 L \left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)^2}\left(\frac{R_{i0}}{\omega L_i} + \frac{k^2 \omega L}{4R_D}\right) \tag{5.39}$$

式中 T_{N0} 为 T_N 相对于 R_i 和 C_i 的极小值。

由式(5.38)、(5.39)可以看出，$\gamma_{JV} = 0$ 时的 T_{N0} 比 $\gamma_{JV} \neq 0$ 时的 T_{N0} 要大，当 $\omega \ll \frac{R_D}{L}$，并且 $\gamma_{JV} = 0$ 时，

$$T_{N0} = T\frac{\omega(\gamma_V\gamma_J)^{1/2}}{\left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right)} \tag{5.40}$$

在实际上，人们关心的是：不同频率时 C_i 的最佳值 C_{i0} 相应的噪声温度极小值 T_{NC}，图 5.6 示出 $\omega \ll \frac{R_D}{L}$，$\gamma_V = 8$，$\gamma_J = 5.5$，$\gamma_{JV} = 6$，$k^2 = 0.5$，由式(5.37)得到的归一化噪声温度 $\frac{T_{NC}}{T} \cdot \frac{R}{\omega_0 L}$ 和归一化频率 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 的关系曲线，其中 $Q_0 = \frac{\omega_0 L_i}{R_{i0}}$ 为参变量。ω_0 为归一化噪声温度极小值对应的频率，由式(5.36)、(5.38)及 $\left(\frac{\partial V}{\partial \phi_e}\right) = \frac{R}{L}$ 可以得到，

$$\omega_0 = \left[L_i C_i\left(1 + k^2 \frac{\gamma_{JV}}{\gamma_V}\right)\right]^{-1/2} \tag{5.41}$$

$$Q_0 = \frac{\gamma_V}{k^2}(\gamma_V\gamma_J - \gamma_{JV}^2)^{-1/2} \approx 5.6 \tag{5.42}$$

由图 5.6 可以看出，Q_0 小于 5.6 时，噪声温度变高，带宽变大。Q_0 大于 5.6 时，噪声温度变高，带宽变小。将上述 γ_V、γ_J、γ_{JV} 值代入(5.36)、(5.38)、(5.39)，得到，

$$\frac{1}{\omega C_{i0}} \approx (1 + 0.75k^2)\omega L_i \tag{5.43}$$

$$R_{i0} \approx 0.35\, k^2 \omega L_i \tag{5.44}$$

$$T_{N0} \approx 2.8T\left(\frac{\omega L}{R}\right) \tag{5.45}$$

如果取 $L_i=10^{-4}$H，$\frac{\omega}{2\pi}=10^4$Hz，$T=4.2$K，$k^2=0.5$，$R=1\Omega$，则 $C_{i0}=1.8\mu$F，$R_{i0}=1.1\Omega$，$T_{N0}=0.74$ mK。

如果工作频率比 10^4 Hz 低很多，若选 $L_i=10^{-4}$ H，则 C_{i0}太大。改用更大的 L_i 可使 C_{i0} 减小，但这时 k^2 变小而噪声温度并不变大。在谐振输入电路和DC-SQUID环间加一个变压器耦合电路，可以增加带宽。

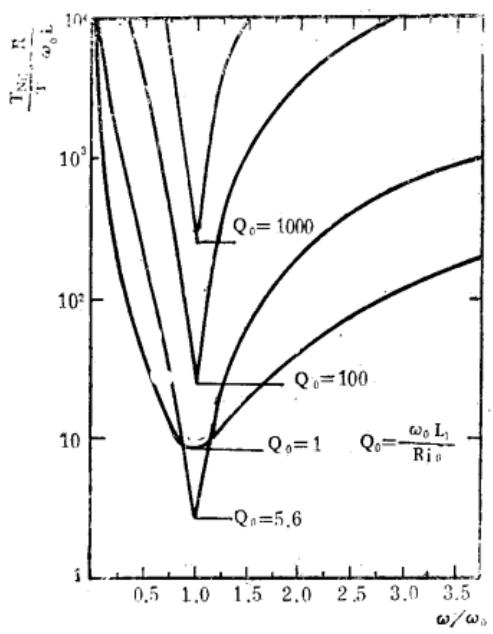


图 5.6 噪声温度和频率的关系

二、非谐振式输入电路 DC-SQUID 电压表

该输入电路由输入线圈 L_i、待测电动势 E_i 及电源内阻 R_i 串联而成，这是最常用的电路。令式(5.35)中的含 $\frac{1}{\omega C_i}$ 项等于 0，对 R_i 求极值，便得噪声温度对 R_i 的极小值 T_{N0} 及相应的 R_i 即 R_{i0} 为：

$$T_{N0}=\frac{\gamma_V\omega RT}{k^2L\left(\frac{\partial V}{\partial\phi_e}\right)^2}\left[\frac{R_{i0}}{\omega L_i}+\frac{k^2\omega L}{4R_D}\right] \tag{5.46}$$

$$R_{i0}=\omega L_i\left[1+\left(\frac{k^2\omega L}{4R_D}\right)^2+\frac{2k^2\gamma_{JV}L\left(\frac{\partial V}{\partial\phi_e}\right)}{\gamma_V R}+\frac{k^4\gamma_J R^2\left(\frac{\partial V}{\partial\phi_e}\right)^2}{\gamma_V L^2}\right]^{1/2} \tag{5.47}$$

工作频率 ω 比约瑟夫逊频率 ω_J 小很多时，将上述的 γ_V、γ_J、γ_{JV} 值代入，则式(5.46)、(5.47)成为：

$$T_{N0}=\frac{8\omega LT}{k^2R}(1+1.5k^2+0.7k^4)^{1/2} \tag{5.48}$$

$$R_{i0}=\omega L_i(1+1.5k^2+0.7k^4)^{1/2} \tag{5.49}$$

可以看出，$k^2\to0$ 时，$T_{N0}\to\infty$。而谐振式输入电路的 DC-SQUID 电压表的 T_{N0} 和 k^2 无关[见式(5.40)]。仍取 $L_i=10^{-4}$H，$k^4=0.5$，$\frac{\omega}{2\pi}=10^4$Hz，$T=4.2$ K，$R=1\Omega$，则 $T_{N0}=5.9$ mK，$R_{i0}=9\Omega$。此噪声温度比谐振式输入电路的噪声温度大 8 倍。但非谐振式输入电路的电压表用于低频场合更方便。在低频率情况下，噪声温度比液氦温度小得多，电压表的灵敏度总是由输入电路的热噪声限制勿需使用谐振式输入电路。

由式(5.35)可以得到噪声温度和频率的关系。当 $\omega\ll\frac{R_i}{L_i}$ 时，$T_N\approx\frac{\gamma_V R_i LT}{2k^2RL_i}$，即 T_N 和频率 ω 无关。当 $\omega\gg\frac{R_i}{L_i}$ 时，$T_N\approx\frac{\omega^2LL_iT}{2k^2RR_i}(\gamma_V+2k^2\gamma_{JV}+k^4\gamma_J)$，即 T_N 和 ω^2 成正比，因此，在高频情况下，不宜使用非谐振式输入电路的电压表。

三、实用电路

图 5.7 示出一种用来测量处在深低温环境中的电源电动势 V_1 的电压表电路。电动势为 V_1、内阻为 R_1 的待测电源和 RF-SQUID 的输入线圈 L_i 及已知标准电阻 R_2 组成串联输入电路，L_2 是电阻 R_2 的寄生电感。室温电路为磁通锁定式自动补偿电路。设开始时电路不在平衡状态，输入电路中的电流为 I_i。这个电流在 SQUID 环孔中产生一个磁通，磁通锁定式电路中的积分器输出一个反馈电流 $I_F = \frac{V_0}{R_F}$，V_0 为反馈电阻 R_F 两端电压。反馈电流要增长到 $I_F R_2 = V_1$，$I_i = 0$，即电路处于平衡状态时为止。由反馈电流及电阻 R_2，就可以定出 V_1。因为测读时，$I_i = 0$，所以该电压表具有很高的输入阻抗。

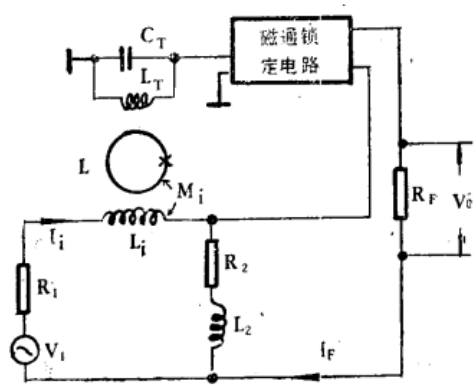


图 5.7　通常的电压表电路

该电压表的频率特性很容易确定。输入电路的总自感 $L_T = L_i + L_2$，总电阻 $R_T = R_1 + R_2$，时间常数 $\tau_T = \frac{L_T}{R_T}$。假定磁通锁定式电路中的积分器的时间常数比 τ_T 小很多，那么，对于频率为 ω 的信号，由欧姆定律得到，

$$V_1 = I_i[R_T + j\omega L_T + g(R_2 + j\omega L_2)]$$

式中 $g = \frac{I_F}{I_i}$。再考虑到 $V_0 = R_F I_F = g R_F I_i$，得到频率特性为：

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{gR_F}{R_T + j\omega L_T + g(R_2 + j\omega L_2)} = \frac{\frac{R_F}{R_2}}{\frac{R_T}{gR_2} + j\omega\frac{L_T}{gR_2} + 1 + j\omega\frac{L_2}{R_2}} \tag{5.50}$$

通常 $\frac{R_T}{gR_2} \ll 1$，于是，上式化简为：

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{\frac{R_F}{R_2}}{1 + j\omega\left(\frac{L_2}{R_2} + \frac{\tau_T R_T}{gR_2}\right)} \tag{5.51}$$

对于低频极限情况，式(5.51)进一步化简为：

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{R_F}{R_2} \tag{5.52}$$

由式(5.51)还可以看到，反馈电路使得输入电路的时间常数减小 gR_2/R_T 倍。时间常数变小是一个非常有用的性质，因为它意味着响应变快，带宽变大。当 $\frac{\tau_T R_T}{gR_2} \ll \frac{L_2}{R_2}$ 时，带宽仅依赖于 $\frac{L_2}{R_2}$。

再讨论该电压表的噪声特性。设RF-SQUID本身的磁通噪声频谱密度为 S_ϕ，输入线圈和 SQUID 环间的互感为 M_i，$M_i^2 = k^2 L_i L$，则相应的输入电路中的电流噪声频谱密度 S_ϕ/M_i^2。考虑到输入电路的阻抗为 $R_T^2(1+\omega^2\tau_T^2)$，于是，电压噪声频谱密度 S_V 为：

$$S_V = \frac{S_\phi R_T^2 (1+\omega^2 \tau_T^2)}{M_i^2} \tag{5.53}$$

通常，$L_T \approx L_i$，$R_T \approx R_1$，在这种情况下，$\tau_T \approx \frac{L_i}{R_i}$，式(5.53)化简为：

$$S_V = \frac{S_\phi R_1 (1+\omega^2 \tau_T^2)}{k^2 L \tau_T} \tag{5.54}$$

再定义电压表的噪声温度 $T_N(\omega)$

$$S_V = 4K_B R_1 T_N(\omega)$$

于是，

$$T_N(\omega) = \frac{S_\phi (1+\omega^2 \tau_T^2)}{4K_B k^2 L \tau_T} \tag{5.55}$$

可以看出，当频率很低即 $\omega \ll \tau_T^{-1}$ 时，噪声温度和频率无关，由下式表示，

$$T_N(0) = \frac{S_\phi}{4K_B k^2 L \tau_T} \tag{5.56}$$

以上二式表明，$T_N(\omega)$ 或 $T_N(0)$ 正比于 $\varepsilon = \frac{S_\phi}{2k^2 L}$，$\varepsilon$ 为SQUID环和输入线圈组合系统的能量分辨率。若取 $\varepsilon = 7 \times 10^{-30}$ J/Hz，$L_i = 0.36\,\mu$H，$R_1 < 1\Omega$，则 $T_N(0) < 1$K。

当待测电源内阻较大，而又希望噪声温度较低时，最好采用变压器，因为变压器具有阻抗变换作用。图5.8示出一种电路，其中室温度电路部分与磁通锁定式电路相比多了一个平衡式混频器。采用变压器后，L_i 的等效自感成为 L_i'[8]，

$$L_i' = K'^2 L_i \frac{L_s}{L_i + L_s} \left[1 + (1 - \alpha'^2) \frac{L_s}{L_i} \right] \tag{5.57}$$

式中 $K'^2 = L_p / L_s$，$\alpha'^2 = \frac{L_p L_s}{M_i'^2}$。对于理想变压器，$K' = N_p / N_s$，$\alpha' = 1$，$N_p$ 和 N_s 为变压器的初级线圈和次级线圈匝数。通常 $L_s \gg L_i$，在这种情况下，上式化简为：

$$L_i' = \left(\frac{N_p}{N_s} \right)^2 L_i \tag{5.58}$$

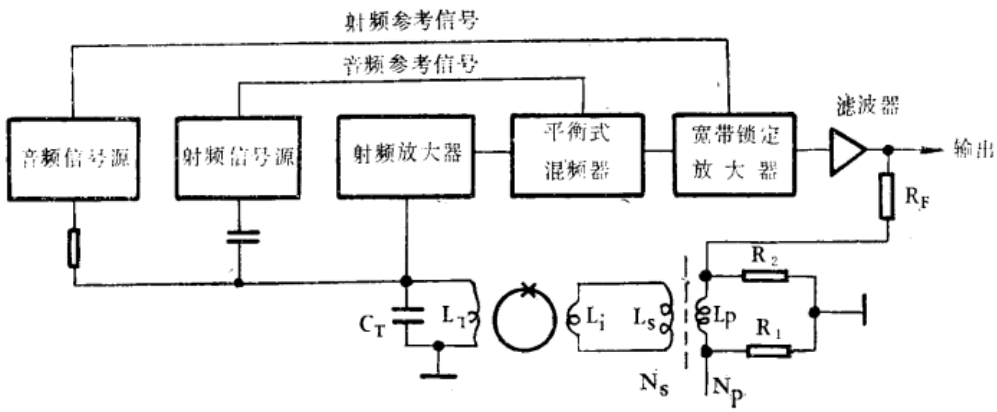


图 5.8　文献[8]报告的 RF-SQUID 电压表的方框图

使用变压器时，折合到电阻 R_1 上的电压噪声频谱密度为：

$$S_V \approx \frac{S_\phi R_1^2(1+\omega^2\tau_T^2)}{M_i^2 K'^2 \alpha'^2 \left(\frac{L_s}{L_i+L_s}\right)^2} \approx \frac{S_\phi R_1(1+\omega^2\tau_T^2)}{\tau_T' k^2 L} f\left(\alpha', \frac{L_i}{L_s}\right) \tag{5.59}$$

式中 $\tau_T' = \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 \frac{L_i}{R_1}$，$f\left(\alpha', \frac{L_i}{L_s}\right)$为非理想变压器修正因子，

$$f\left(\alpha', \frac{L_i}{L_s}\right) = \left(1+\frac{L_i}{L_s}\right)\frac{1}{\alpha'^2}\left[1+(1-\alpha'^2)\frac{L_s}{L_i}\right]$$

对于给定的 α'，当 $\frac{L_i}{L_s} = (1-\alpha'^2)^{1/2}$ 时，$f\left(\alpha', \frac{L_i}{L_s}\right)$取极小值。因此，为了得到最佳性能，不仅要求 α' 尽量接近 1，而且要求 $L_s \approx L_i(1-\alpha'^2)^{1/2}$。对于实际变压器，$\alpha' = 0.90 \sim 0.95$。当 $\frac{L_i}{L_s} = 0.25 \sim 0.65$ 时，$f\left(\alpha', \frac{L_i}{L_s}\right)$取极小值，约为 2.0～2.5。令 $f\left(\alpha', \frac{L_i}{L_s}\right) = 2.25$，则得，

$$S_V = \frac{2.25 S_\phi R_1(1+\omega^2\tau_T^2)}{\tau_T' k^2 L} \tag{5.60}$$

$$T_N(\omega) = \frac{2.25 S_\phi(1+\omega^2\tau_T^2)}{4K_B k^2 L \tau_T'} \tag{5.61}$$

式中

$$\tau_T' = \left(\frac{N_s}{N_p}\right)^2 \frac{L_i}{R_1}$$

§5.3 电 流 计

带输入线圈的 SQUID 系统便是一个电流计。当待测电流流经输入线圈时，SQUID 系统输出一个电压。由该电压及它对输入电流的传递函数，便可以定出待测电流的大小。

Clarke 曾制作出一个别致的检流计即焊锡滴结检流计，但因锡焊滴结的性能不容易控制，重复性差，目前已被平面薄膜 DC-SQUID 电流计代替。现在介绍一种用来测量磁场梯度的薄膜DC-SQUID 电流计(图 5.9)[9]。它的制备工艺如下：1.在玻璃基片上蒸镀两个圆形 Cr+Au 薄膜，用作隧道结的分流电阻。还蒸镀上四个Cr+Au圆膜用来连接电流、电压引线；2.移入溅射台，溅射上铌条；3.在铌条上溅射一圆形 SiO+Ge 绝缘层；4.移入烘箱，热氧化；5.移入蒸镀台，蒸镀 Pb-In带条从而形成隧道结；6.甩胶，借以保护金属带条及隧道结；7.用铟把两根铜线分别接到Nb 条 Pb-In 条端部的 Cr+Au圆膜上，用作电流、电压引线。另外两个Cr+Au圆膜备用。Nb条和 Pb-In 条交叉处两个带条间的SiO+Ge 圆膜将两个带条绝缘，相应的电容为 1pF，与工作电压(1μV)相应的约瑟夫逊频率时的阻抗约为 300Ω，对 DC-SQUID 性能

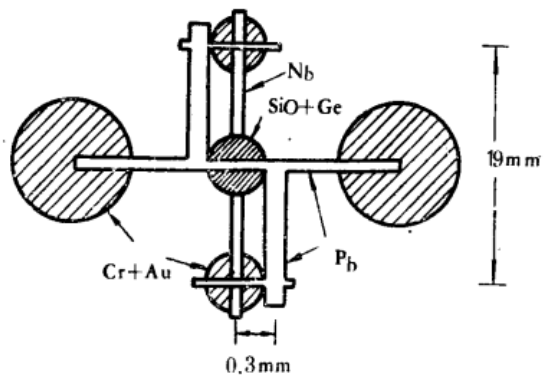


图 5.9 薄膜 DC-SQUID 电流计示意图

的影响可以忽略。

该 DC-SQUID 电流计每个隧道结的电阻 R 约为 0.6Ω，临界电流约为2μA，结电容约为 400pF，$\beta_c=\frac{2\pi I_c R^2 C}{\phi_0}<1$，它的 I-V 特性曲线没有回滞。

该 DC-SQUID 电流计的反馈、调制线圈是用 40 号铜丝绕成的，共 10 匝或 20匝，贴在 DC-SQUID 的玻璃基片上。所用电路与前述的圆柱形薄膜 DC-SQUID 的电路相同。100KHz 的交流电注入反馈线圈，在 SQUID 环孔中产生峰－峰值约为 $\phi_0/2$、100KHz 的磁通。DC-SQUID 环输出的 100KHz 的电压，经 LC 谐振电路，送入室温放大器、相敏检波器、积分器，积分器的输出信号送入反馈线圈，即整个电路构成磁通锁定式补偿电路。

实验结果表明，铌条中的电流每变化 2.2μA 时，SQUID 环中的磁通变化 $1\phi_0$。由此可得铌条和 SQUID 环间的互感为 0.94nH。SQUID 环电感为 2.5nH。实验结果还表明，把该 DC-SQUID 电流计装在铅屏蔽盒内测得的噪声谱跟不用铅屏蔽盒而改用三层玻莫合金盒测得的噪声谱是基本上相同的。该 DC-SQUID 电流计可以工作在无屏蔽措施的实验环境中，无论 DC-SQUID 的空间方位如何，它的临界电流变化都很小。

§5.4 磁场梯度计

磁场梯度计用来测量磁感应强度对空间坐标的一阶导数或二阶导数。它由输入电路和 RF-SQUID 或 DC-SQUID 组成。图 5.10*a* 为测量磁感应强度 z 分量的一阶导数 $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ 的输入电路，它是由两个检测线圈和输入线圈组成的全超导回路。图 5.10*b* 示出测量 $\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}$ 的输入电路，它是由四个检测线圈和一个输入线圈组成的全超导回路。该超导输入电路有线绕的或溅射平面线圈的。

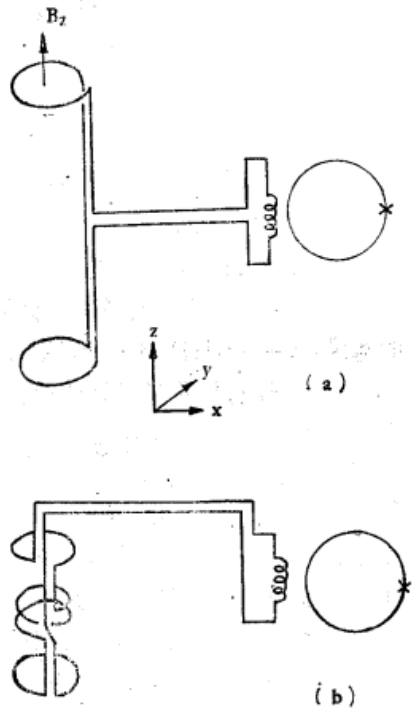


图 5.10 磁场梯度计的输入电路

一、线绕输入电路的磁场梯度计

输入电路中的两个检测线圈通常绕在石英棒上，它们的匝数相同，绕线方向相反，要尽量做到尺寸相同并严格平行，放在均匀磁场中，两个检测线圈中所产生的电流大小相同方向相反，所以输入电路中没有电流。放到非均匀磁场中，由于两个检测线圈所处磁场不同，感应电流也不同，差电流将流过输入线圈，产生的磁通耦合到 SQUID 环孔中，SQUID 系统就会测出该磁通。再根据检测线圈面积、自感、其间的距离等量，推算出 $\frac{\partial B_z}{\partial z}$。通常是利用实验方法标定 SQUID 系统的输出电压和 $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ 的关系。

现在再来讨论测量灵敏度问题。假定二检测线圈的自感 L_p、匝数 N_p 和面积 A_p 相同。它们所在处的磁感应强度的差值变化 δB_z 时，输入电路中产生的净电流为 I_i。I_i 和 δB_z 的关系为：

$$I_i(2L_p+L_i)+N_pA_p\delta B_z=0$$

$$I_i=-\frac{N_pA_p\delta B_z}{2L_p+L_i} \tag{5.62}$$

电流 I_i 在 SQUID 环孔中产生的磁通为：

$$\delta\phi_s=-M_iI_i=\frac{N_pA_pM_i}{2L_p+L_i}\delta B_z=\frac{N_pA_pk(LL_i)^{1/2}}{2L_p+L_i}\delta B_z$$

令 $\delta\phi_s$ 等于 SQUID 系统的磁通噪声，便得梯度计的灵敏度。容易看出，$L_i=2L_p$ 时，灵敏度取极大值。

实际上，两个检测线圈不能做得完全相同，所处环境(磁场除外)也不会完全相同。在这种情况下，对于均匀的 B_z，梯度计的输出不等于零，B_x、B_y 也影响梯度计的输出。为了减小这种效应，可以沿直角坐标轴放三个超导小片，调节它们的位置，直到装梯度计探头的杜瓦容器绕直角坐标轴旋转时，SQUID 系统的响应最小时为止。利用这种方法，可以使两个检测线圈的非对称度达到 10^{-8}。

直径 6 cm、相距 20 cm 的检测线圈灵敏度可达 $10^{-14}\mathrm{Tm^{-1}Hz^{-1/2}}$。灵敏度的典型值为 $10^{-13}\mathrm{Tm^{-1}Hz^{-1/2}}$。

二、平面薄膜 DC-SQUID 磁场梯度计

文献[9]报导的平面薄膜 DC-SQUID 磁场梯度计相当于将上一节的 DC-SQUID 电流计上迭加一个矩形 Pb-In 带条而形成的，如图 5.11*a*。Pb-In 带条厚为 0.5μm，宽为 150μm。矩形框尺寸为 48×16mm，蒸镀在 89×21×12mm 的玻璃基片上，采用厚玻璃基片是为了减小它冷却时的形变。DC-SQUID 电流计中的 Nb 条和矩形框的 Pb-In 条间系超导接触，这就构成了两个环孔，每个环孔尺寸为 24×16mm，自感为 86nH，二环孔间的互感为 17nH，用来作为磁场梯度计的检测线圈。它们相当于只有 1 匝的检测环。与环面垂直的均匀磁场 B_z 在每个检测环中感应出电流。如果二检测环完全对称，则 Nb 条中净电流为零，DC-SQUID 输出信号为零。若磁场不均匀即 $\frac{\partial B_z}{\partial x}\neq 0$，则 Nb 条中存在差电流，

$$I_i=\frac{a^2b}{L_i+M_i}\frac{\partial B_z}{\partial x} \tag{5.63}$$

式中 a 和 b 为检测环的 x 方向长度和 y 方向长度，L_i 为检测环的自感，M_i 为二检测环间的互感。可见，差电流 I_i 正比于磁场梯度 $\frac{\partial B_z}{\partial x}$，利用 DC-SQUID 电流计测量 I_i，就可以定出 $\frac{\partial B_z}{\partial x}$。

由上式容易得到磁场梯度的测量灵敏度 $\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)_{min}$ 为：

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)_{min}=\frac{S_\phi^{1/2}(L_i+M_i)}{M_ia^2b} \tag{5.64}$$

式中 S_ϕ 为 DC-SQUID 的磁通噪声频谱密度，M_i 为Nb 条和 SQUID 环间的互感，L_i 和 M_i 决定于检测环的尺寸。可见，尽量增加 M_i，尽量减小 S_ϕ，并选用合适的检测环尺寸，可以提高灵敏度。

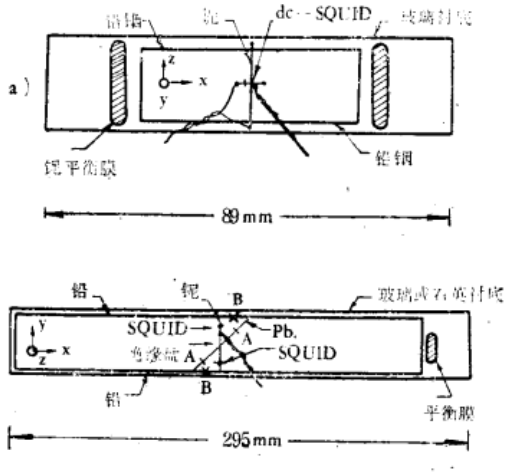


图 5.11 平面薄膜 DC-SQUID 磁场梯度计

该磁场梯度计的平衡是通过调节另外两块蒸镀了铌条(尺寸为 20mm×3mm×300nm)的玻璃片 x 方向位置来实现这二个的。玻璃片装在一个架子上，镀铌条的一面紧贴DC-SQUID磁场梯度计的薄膜，用弹簧压紧。架子的位置由杜瓦容器外的微调机构来调节，行程为6mm，玻璃片的位置调整过 50 多次，没有擦伤 Pb-In 带条。该磁场梯度计的探头装在 5 升玻璃纤维杜瓦容器内，杜瓦容器内装有减震弹簧。液氦中的所有焊点均用铜焊，因为探头附近不能有超导体，否则磁场梯度计不能平衡。

图 5.11*b* 示出大尺寸磁场梯度计的结构，它的制作工艺和上述小尺寸磁场梯度计相同。基片是玻璃片(尺寸为 285×38×31mm)或石英片(尺寸为 295×38×38mm)。两个检测环孔的尺寸都是 127×33mm，每个环的自感为 575 nH，其间互感为 59 nH。斜向的 Pb-In 带条和Nb 条间有 SiO+Ge 绝缘层。从 A 点切断带条时，检测环孔成为并联环孔结构，从 B 点切断带条时，则成为串联环孔结构。基片上作了二个 DC-SQUID。下面的一个备用。采用一个Nb 膜来平衡此磁场梯度计，该Nb 膜的安装、调节方法同前。

首先将磁场梯度计安放到赫姆霍兹线圈(直径 1米、1匝)轴线中心点。该线圈中通有0.1Hz 低频率的交流电，在垂直于检测环面方向上产生峰－峰值约为 0.5μT的磁场。DC-SQUID 工作在磁通锁定状态。平衡膜的位置要调整到使得 DC-SQUID 对磁场的响应最小。

实验结果指出，小尺寸梯度计的 z 方向平衡度可以达到 10ppm。大尺寸串联环孔磁场梯度计 z 方向平衡度可以达到 3ppm。为达到这样的平衡度，需要反复调节检测环孔尺寸：除去一些Nb-In 膜，并在另一个地方蒸镀新的 Nb-In 膜。

实验结果还表明，小尺寸梯度计的 y 方向平衡度跟基片是否抛光无关，但和DC-SQUID 附近的磁场畸变程度有关。提高 y 方向平衡度的方法如下：在基片侧表面(即跟环面相垂直的表面)，沿检测环长度方向蒸镀一个铅条(厚度为 1μm，宽度为 350μm，比环表面低1mm)，它将使检测环附近的磁场畸变，从而使 y 方向平衡。该铅条的作用和平衡膜的作用相反，将平衡膜去掉一些，则可以减小平衡度的作用。待平衡膜长度减到 14 mm 时，y 方向平衡度由原来的 100ppm 提高到 10ppm。若进一步仔细调节，y 方向平衡度可以达到 1 ppm。利用该方法，还可以提高 x 方向平衡度。

大尺寸串联环孔梯度计的平衡方法如下：把装有梯度计的杜瓦容器搬到地磁场均匀的地方。为减小射频干扰，平衡工作在铜屏蔽室内进行。将杜瓦容器绕 z 轴旋转，并调整平衡膜位置，直到旋转过程中 DC-SQUID 的响应最小时为止。

调好平衡后，将已知的不平衡磁通加入梯度计，以确定它们的灵敏度。实验结果表明，对于磁通分辨率为 $8\times10^{-5}\phi_0/\mathrm{Hz}^{1/2}$ 的 DC-SQUID，小尺寸梯度计的灵敏度为 2×10^{-12}

$Tm^{-1}Hz^{-1/2}$，大尺寸串联和并联环孔梯度计的灵敏度分别为3.7×10^{-13}和2.1×10^{-13} $Tm^{-1}Hz^{-1/2}$。

平面薄膜DC-SQUID磁场梯度计有以下缺点：

1. 灵敏度较低。大尺寸并联环孔梯度计的灵敏度约比线绕输入电路的梯度计灵敏度低七倍。灵敏度较低的原因是：平面薄膜梯度计的DC-SQUID环和并联检测环之间的耦合系数较小，从而其间的互感较小。

2. 垂直于薄膜带条表面的地磁场能够穿透该薄膜。该梯度计在地磁场中移动或旋转，随后又回到原来位置时，由于磁通穿透效应，将导致DC-SQUID输出滞后。当平衡度大于1ppm时，该输出滞后无关紧要。但若进一步提高平衡度，该输出滞后便起主要作用。为减小它的影响，就必须溅射或蒸镀更窄的带条。

3. 调节平衡的程序太复杂；检测环的尺寸太大，形状不好。

为了克服后一缺点，应当把检测环和SQUID环的形状和尺寸作成最佳形状和尺寸。文献[10]中讨论了这一问题。文中指出，检测环和SQUID环的形状和尺寸最佳化后，当隧道结的面积为$50\times50\mu m^2$，磁通噪声频谱密度为$6\times10^{-5}\phi_0Hz^{-1/2}$，利用$7.5\times2.5\ cm^2$的基片，就可以使磁场梯度灵敏度达到$2\times10^{-13}Tm^{-1}Hz^{-1/2}$。

上述的平面薄膜DC-SQUID磁场梯度计是由不稳定的Nb-In合金制成的，检测环的尺寸也较大。为了克服这些缺点，人们研究成功全部使用铌膜的DC-SQUID磁场梯度计[11,12]，它的并联检测环是由几个带条环并联起来而形成的。较之单一带条环能减少由于超导膜中的穿透磁通运动而造成的噪声。该梯度计的性能指标是：隧道结的临界电流为1-10μA，结电阻为100-300Ω，I_cR的典型值为600nV，在4.2K时的I-V特性曲线稍有回滞。选用合适的偏置电流后，该回滞不影响DC-SQUID的工作特性。该DC-SQUID的电压调制深度为5-10 μV，调制深度较小的主要原因是：环电感较大，计算值为2.7nH。工作在磁通锁定模式下的磁通噪声频谱密度为$1\times10^{-4}\phi_0Hz^{-1/2}$。磁场梯度灵敏度为$3.5\times10^{-12}$ $Tm^{-1}Hz^{-1/2}$。该梯度计装在玻璃纤维杜瓦容器内，杜瓦容器内的金属屏蔽能使环电感减小，从而使磁通噪声频谱密度成为$7\times10^{-5}\phi_0Hz^{-1/2}$。该梯度计对垂直场的平衡度为300ppm，可以测出人的心磁图。

三、同时测量磁场梯度的三个分量

1980年以前，人们利用三套独立的RF-SQUID磁场梯度计才能测量磁场梯度的三个分量，这显然是一种不完善的方法。为克服这种方法的缺点，有人发明了一个更简单的系统[13]，其中共有三个RF-SQUID环，它们共用一个谐振电路及一套放大电路，可以同时或分别测出磁场梯度的三个分量即$\frac{\partial B_x}{\partial x}$、$\frac{\partial B_y}{\partial y}$、$\frac{\partial B_z}{\partial z}$，价格比早期的系统便宜，液氦的消耗也少。

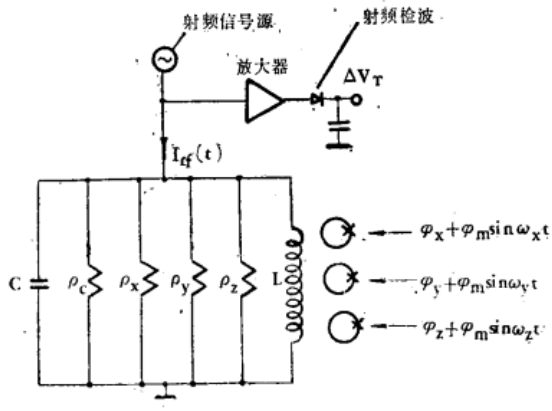


图5.12 同时测量磁场梯度三个分量的探头示意图

1. 工作原理

图5.12示出该系统的探头部分。三个RF

-SQUID 环和一个谐振电路相耦合。为说明它的工作原理，可以设想将 y 方向和 z 方向的二个 RF-SQUID 环取掉，仅留下 x 方向的，这就是为通常的 RF-SQUID 探头。RF-SQUID 环经历一个回滞单元从谐振电路吸收的能量可以用一个并联电阻 ρ_x 来等效。输入磁通 ϕ_x 和射频电压幅度 V_T 的关系可以等效成 ϕ_x 和 ρ_x 的关系，即

$$V_T = \rho_x I_{rf} \tag{5.65}$$

假定 V_T 和 ϕ_x 的关系是正弦的，则

$$\rho_x = \rho_1 + \rho_2 \cos\frac{2\pi\phi_x}{\phi_0} \tag{5.66}$$

如果 y 方向和 z 方向的 RF-SQUID 环也和谐振电路耦合，输给这两个 RF-SQUID 环的磁通为 ϕ_y 和 ϕ_z，则需增加两个并联电阻 ρ_y 和 ρ_z，

$$\rho_y = \rho_1 + \rho_2 \cos\frac{2\pi\phi_y}{\phi_0} \tag{5.67}$$

$$\rho_z = \rho_1 + \rho_2 \cos\frac{2\pi\phi_z}{\phi_0} \tag{5.68}$$

于是，

$$V_T = I_{rf}\left(\frac{1}{\rho_x} + \frac{1}{\rho_y} + \frac{1}{\rho_z}\right)^{-1} \tag{5.69}$$

在以上各式推导过程中，假定谐振电路本身的并联电阻比 ρ_x、ρ_y、ρ_z 大很多，可以不计它的影响。

假定 $\rho_1 > \rho_2$，将式(5.69)展开，得到电压调制深度 ΔV_T 为：

$$\Delta V_T = \frac{I_{rf}\rho_2}{9}\left(\cos\frac{2\pi\phi_x}{\phi_0} + \cos\frac{2\pi\phi_y}{\phi_0} + \cos\frac{2\pi\phi_z}{\phi_0}\right) \tag{5.70}$$

即 ΔV_T 正比于三个输入磁通余弦之和。为了将它们分开，三个 SQUID 环孔中还分别注入振幅相同而频率各不相同的正弦磁通。在这种情况下，ΔV_T 可以写成：

$$\Delta V_T = \frac{I_{rf}\rho_2}{9}\left[\cos\frac{2\pi}{\phi_0}(\phi_x + \phi_m \sin\omega_x t) + \cos\frac{2\pi}{\phi_0}(\phi_y + \phi_m \sin\omega_y t) + \cos\frac{2\pi}{\phi_0}(\phi_z + \phi_m \sin\omega_z t)\right] \tag{5.71}$$

式中 $\omega_i = 2\pi f_i (i = x, y, z)$，$f_x \neq f_y \neq f_z$，$f_x$、$f_y$ 和 f_z 间要有非整数倍的关系，并且 $f_x + f_b < f_y - f_b$，$f_y + f_b < f_z - f_b$，f_b 为系统的带宽。应用贝塞尔函数将式(5.71)展开，仅保留第一项，得到，

$$\Delta V_T = K_1\left[\sin\frac{2\pi\phi_x}{\phi_0}\sin\omega_x t + \sin\frac{2\pi\phi_y}{\phi_0}\sin\omega_y t + \sin\frac{2\pi\phi_z}{\phi_0}\sin\omega_z t\right] \tag{5.72}$$

式中

$$K_1 = -\frac{2}{9} I_{rf}\rho_2 J_1\left(\frac{2\pi\phi_m}{\phi_0}\right) \tag{5.73}$$

J_1 为第一阶贝塞尔函数。

由式(5.72)可知，三个输入磁通分别被调频率 ω_x、ω_y、ω_z 的正弦磁通调制，因此，用三套相敏检波器就可以把 ϕ_x、ϕ_y、ϕ_z 测量出来。

2. 基本特性

RF-SQUID 环的制作方法是：在石英基片上溅射铌膜，用化学腐蚀方法作出平面双孔微桥结 RF-SQUID，其中的一个孔是圆形的，另一个孔是扇形的。环电感为 1nH，微桥结的临界电流约为 2μA。利用阳极氧化法调节微桥结的临界电流，调节过程如下：首先调节一个微桥结的临界电流，测量射频伏安特性曲线，直到该曲线合用时为止；再依次调节第二个和第三个微桥结的临界电流，直到它们的伏安特性曲线跟第一个微桥结的伏安特性曲线相似时为止。这个调节过程对于发展该系统极为重要。

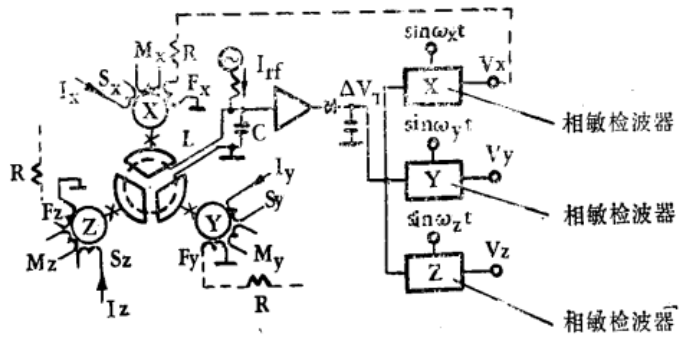


图 5.13　同时测量磁场梯度的三个分量的电路

所用电路如图 5.13。三个扇形 SQUID 环孔和同一个谐振线圈相耦合。该线圈是用铌膜刻蚀出来的，和微桥结同在一个基片上。三个反馈线圈 F_i、三个调制线圈 M_i 和三个输入线圈 S_i 分别共轴，跟各自的圆形 SQUID 孔耦合。输入电流 I_i 经各自的输入线圈，产生的磁通为 ϕ_x，ϕ_y 和 ϕ_z。谐振线圈上的电压经放大、检波输给三个相敏检波器。它们的参考信号圆频率为 ω_x、ω_y 和 ω_z。

首先，将磁通 ϕ_x 加到 x 方向 RF-SQUID 环孔中，不加 ϕ_y 和 ϕ_z，测 ΔV_T—ϕ_x 曲线。实验结果指出，该曲线由两条曲线叠加而成，一条周期为 $1\phi_0$，另一条周期约为 $20\phi_0$。后者是由于 ϕ_x 泄漏到 y 和 z 方向 RF-SQUID 环中 $\phi_x/20$ 造成的。这样的交叉耦合磁通表明系统工作正常。

将 x 方向相敏检波器输出端和反馈线圈 F_x 连起来，加上调制磁通。y 和 z 方向不连，但加上调制磁通。x 方向相敏检波器的输出电压 V_x 产生一个反馈磁通 ϕ_{fx}，ϕ_{fx} 等于 ϕ_x，

$$\phi_x = \phi_{fx} = KV_x$$

式中 K 为 V_x 对 ϕ_{fx} 的传递函数。使输入磁通 ϕ_x 为 0，将 ϕ_y 加入 y 方向 RF-SQUID 环中。测量结果表明，V_x 随 ϕ_y 的增加而线性增加，$\phi_y = 1\phi_0$ 时的 V_x 相应于 $0.05\phi_0$，这表明，ϕ_y 泄漏到 x 方向 RF-SQUID 环中的磁通占 5%。

最后，将反馈线圈 F_y 和 F_z 分别与 y 和 z 方向相敏检波器相连，ϕ_x、ϕ_y、ϕ_z 依次分别加入。测量结果表明，各个相敏检波器仅响应各自的输入磁通，不再出现上述的磁通交叉耦合问题。

该系统的典型应用是同时测量 $\partial B_x/\partial x$、$\partial B_y/\partial y$ 和 $\partial B_z/\partial z$。如图 5.14，正方胶木块的三组对称面上贴了三组一阶磁场梯度计用的超导输入线圈。反馈和调制信号经变压器 L_f 馈入 SQUID 环。$\partial B_x/\partial x$、$\partial B_y/\partial y$、$\partial B_z/\partial z$ 跟相敏检波器输出电压 V_x、V_y、V_z 的关系为：

$$nsa\frac{\partial B_x}{\partial x} = KV_x$$

$$nsa\frac{\partial B_y}{\partial y}=KV_y$$

$$nsa\frac{\partial B_z}{\partial z}=KV_z$$

式中 a 为正方胶木块的边长，s 和 n 分别为一阶梯度计输入线圈的面积和匝数

曾测量出一个小磁体移动距离和 V_x、V_y、V_z 的关系。测量结果和计算结果大体上一致，其间的一些差别来源于三组输入线圈中的两个检测线圈的不对称。该系统的灵敏度为 10^{-10} $Tm^{-1}Hz^{-1/2}$。

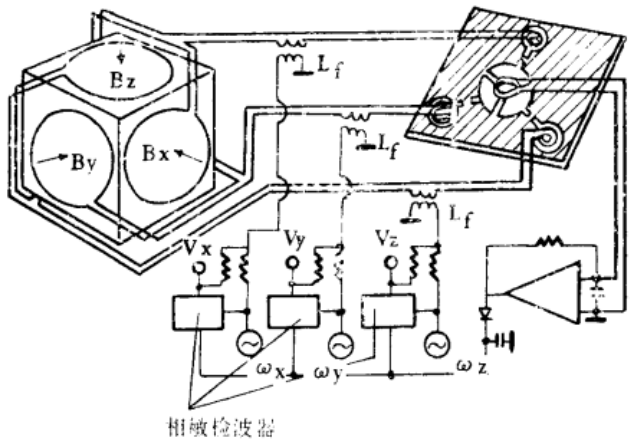


图 5.14　同时测量 $\frac{\partial B_x}{\partial x}$、$\frac{\partial B_y}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial B_z}{\partial z}$

§5.5 磁化率计[14,15]

我们知道，磁介质处在磁场中时，将呈现磁性，即被磁化。磁化强度 $\vec{M}$ 为：

$$\vec{M}=\chi\vec{H}$$

式中 $\vec{H}$ 为外磁场强度，χ 为介质的磁化率。

在材料的磁性研究中，磁化率是一个经常需要测量的物理量，过去使用磁天平、振动磁强计等，近几年人们使用 SQUID 磁化率计，得到了满意的结果。

一、工作原理

SQUID 磁化率计探头的核心部分是一个超导磁体及一个 SQUID 探头。SQUID 的输入线圈和检测线圈组成超导磁通变换器。待测样品插在检测线圈中央，待测样品和检测线圈均置于超导磁体的强磁场中。用检测线圈来检测样品的磁化强度。设想样品插入前距离检测线圈足够远，检测线圈所包围的磁通就是高均匀度、高稳定度的超导磁场所产生的磁通。这个假定是合理的，因为样品室里的气体介质的磁化对检测线圈的磁通贡献很小，而且还可以把这些气体抽走，使其影响更小。另外，由于样品的磁化场随距离的三次方衰减，当样品插

入前距检测线圈足够远时，便可以忽略样品磁化场对检测线圈的影响。这样，样品插入检测线圈时测得的磁通变化量 $\Delta\phi$，实际上就是样品磁化场的磁通。测得这个磁通，就可以计算出该样品的磁化率。如果样品是长圆柱形或球形的，$\Delta\phi$ 和样品磁化率的关系是：

$$\Delta\phi = \frac{\mu_0 \chi H V}{D}$$

式中 χ 为样品的体磁化率，V 为样品的体积，D 为检测线圈的平均直径。如果样品尺寸较大、形状较复杂，不便精确计算，可通过实验校准曲线求得磁化率。为此，先把与样品形状完全相同、磁化率已知的样品插入检测线圈中，得到一个输出电压；然后再把待测样品插入，得到另一个输出电压。由这二个电压的比值及已知磁化率，就可得到待测样品磁化率。

图 5.15 示出磁化率计的低温部分。最里层是一个上端开口的样品杜瓦，待测样品从它的上端插入处于磁场中心位置的超导检测线圈中。该超导检测线圈采用一阶磁场梯度计输入电路的程式，是一对形状、尺寸、自感尽量相同，但反向联接的线圈，一个在上端，另一个在下端。为了减小样品插入上端线圈时对下端线圈的影响，上端线圈和下端线圈间沿轴向方向要有足够大的距离。样品杜瓦下部处于磁场中的部分由双层薄壁铜管组成。这两层薄壁铜管在标有温度调节器的部位焊接在一起。其所以用铜管，是为了尽量减少样品杜瓦轴向的温度梯度。温度调节器的作用是补偿样品杜瓦的辐射热损失，并使样品保持在需要测量的温度。利用这个温度调节器，可以把杜瓦内的样品温度控制在±0.001K。环绕样品杜瓦的下部，还有一个辐射屏，使得来自样品上的辐射热达不到处在 4.2K 的超导检测线圈上去。达到该辐射屏上的辐射热从上面的温度调节器的部位传到液氦中去。检测线圈骨架上也装有温度调节器，使该骨架的温度波动减小，从而提高了磁化率计的分辨率。超导磁体工作在持续电流方式下，以保证磁场高度稳定。实验发现，即使在持续电流状态下工作，由于存在磁通蠕动和应力弛豫等现象，磁场每天仍可能有 10^{-7} 的漂移。为了解决这个问题，在超导磁体和检测线圈之间，还装了一个 Nb_3Sn 圆筒。当超导磁体开始加电流升磁场时，使 Nb_3Sn 圆筒的温度高于 Nb_3Sn 的临界温度 T_c。当磁场达到要求的值时，再把 Nb_3Sn 圆筒的温度降低到 T_c 以下，这样它就会屏蔽掉以后的外磁场变化。由于 Nb_3Sn 圆筒中的初始电流等于零，因而没有磁通蠕动和机械应力问题。

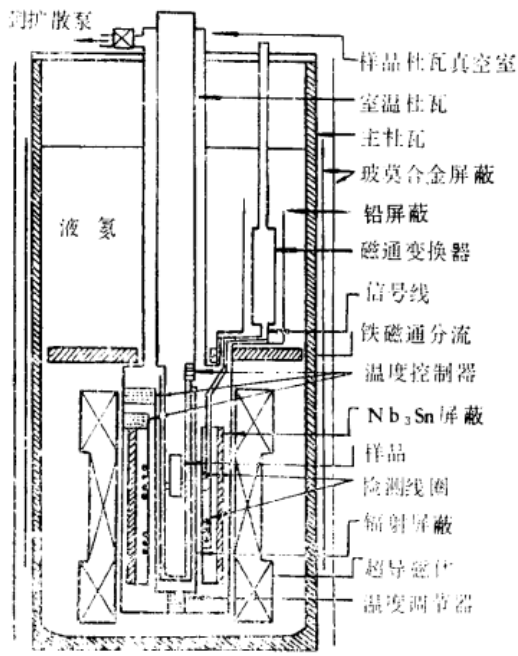


图 5.15　磁化率计的低温部分示意图

除上述措施外，还要尽量减小连接引线因磁场漂移和机械震动等外界因素对测量的影响。因此，检测线圈和 SQUID 输入线圈间的超导连线要扭绞，并穿过一个细铌管。SQUID 环除自身已有的铌屏蔽筒外，还在它外面另加一层超导铅屏蔽。超导磁体和 SQUID 环之间还加了一个铁磁材料圆盘，以减小 SQUID 环附近的磁场，以便应用低临界磁场的屏蔽材

料。主杜瓦外面的高导磁率玻莫合金圆筒用来屏蔽地磁场等背景磁场，使 SQUID 即使在室温时也处在比较低的磁场环境中。

二、噪声

磁化率计的噪声来源有四个：

1．检测线圈附近的通常金属中电子热运动产生的磁场。其中以样品杜瓦内壁产生的噪声最大。使用高电阻率的材料作为内壁材料，并尽量减小壁厚，可以减小这种噪声。但这种材料的传热差，会使温度稳定性变坏。

2．结构材料的核磁性和电子顺磁性与温度的关系。磁化率的温度变化率反比于绝对温度的平方，因此，必须认真选取磁性很小的结构材料，并精密控制各个部件的温度。石英的核磁性甚小，但电子顺磁性的大小和其中的杂质种类及含量有着密切关系。为了把电子顺磁性降低到核磁性的大小，石英中的铁、镍等杂质含量要低于 10^{-9}。另外，所用材料要有高的热导率，借以减少辐射热引起的温度变化，这要求使用高纯金属，但它的导电性很好，会使响应时间变长，并会增加噪声。作为折衷，选用 3003 型铝作为检测线圈的骨架材料。用温度控制器将该骨架和超导磁屏蔽的温度控制在$\pm\mu$K，借以消除液氦温度涨落的影响。

样品杜瓦和检测线圈之间的辐射屏蔽也产生顺磁噪声及热噪声。要选用导热率高、导电率不高的材料，如 1100 型铝，作辐射屏蔽。辐射屏蔽两端的温度要调节到使得检测线圈附近的温度具有对称性，从而增加样品温度时上端线圈和下端线圈附近的辐射屏蔽的温度有着同样大小的变化，对磁化率测量不产生影响。

3．震动和微音效应产生的噪声。检测线圈相对于超导磁体的微小位移会产生虚假信号。微音效应产生的磁通变化很快时，会导致 SQUID 系统失锁。检测线圈和超导屏蔽间的相对运动也会产生虚假信号。为消除以上虚假信号，就需要把超导屏蔽和线圈骨架刚性地联成一体。

增加磁场均匀度能减小微音效应，为此，检测线圈所在区域的磁场均匀度至少要调到 10^{-5}。

4．SQUID 系统本身的噪声。

以上噪声和外磁场的关系是不同的。顺磁噪声和微音噪声与外磁场无关。热噪声和 SQUID 本身的噪声对磁化率噪声的贡献反比于外磁场强度。

三、应用

表 5.1 示出 SQUID 磁化率计的主要性能指标。可以看出，它的分辨率和测量精度较高，是其他测量手段所达不到的。

SQUID 磁化率计除了测量样品的体磁化率外，还可以用来测量样品的质量磁化率。为此，当要求的精度很高时，必须知道样品密度在各个温度时的精确数据，否则测量精度要低一些。对于低精度测量，应该使用短圆柱样品，它的长度和直径相近。此时，SQUID 系统的输出信号正比于样品质量，而和样品体积及密度无关。当然，这只是近似情况。严格讲，只有无限小的样品，测量才是准确的。因此，要想使测量误差很小，就必须减小样品尺寸。当样品长度和直径均为 5.6mm 时，由于样品的有限尺寸产生的质量磁化率误差为 5%，即使对于理想的球状样品，SQUID 系统的输出信号也不严格正比于样品质量，这种偏离来自磁

表 5.1

样品杜瓦孔径	6.3mm
样品有效长度	25mm
磁场强度	0.01～50千高斯
磁场强度的测量精度	0.02%
样品温度	1.5～300K
量　　程	总磁矩 10^{-8}～10^{-1}emu
分 辨 率	$\Delta M = 8\times10^{-10}$emu，$\Delta\chi = 7\times10^{-13}$emu/cm³
测量精度	$\Delta\chi/\chi = 10^{-6}$
响应时间	10^{-3}～10^{4}秒

体磁场的不均匀性。对于液态样品，由于降低温度后，容器和样品的膨胀系数的不同，会引起样品形状的变化，测量误差更大。目前，可检测的最小磁矩变化 ΔM 为 8×10^{-10}emu。对同一样品，测得的质量磁化率的误差为 4×10^{-12}emu/g。

SQUID 磁化率计还可以测量样品磁化率随温度的变化。此时，样品插入检测线圈后不再移动，观察样品温度改变时，SQUID 系统输出信号的变化，然后再扣除因样品温度改变而引起的样品杜瓦及其他结构材料磁性变化的影响。

SQUID 磁化率计还可以用来研究化学反应和生物分子相变动态过程，有人曾用这种仪器测量血红蛋白和一氧化碳的动态反应。血红蛋白不与一氧化碳结合时，是顺磁性的。与一氧化碳结合以后，则变成抗磁性的。

这种仪器还广泛地用于地质样品的剩余磁化强度和感应磁化强度的测量。在物理研究中，用它研究过渡族金属化合物磁性和与结构有关的磁性变化，还可以用来研究超导体的磁性相变和各种激发引起的磁性变化。

SQUID 磁化率计还可以用来测量 mK 量级的温度，这是因为一些材料的核磁化强度和它的温度的乘积等于常数，即遵从居里定律。设计这种温度计的首要问题是选择合用的核磁化率较大的材料。研究结果指出，铝、铜、铂、锡等较好。其中铝的核磁化率最大，核自旋弛豫时间最长，温度低于 10mK 时，杂质不影响铝的核磁化率。文献[15]中所用的铝是粉末状的，粒度为 75–150μm，体积为 0.02cm³，放在磁化率计的检测线圈中。此检测线圈及其铌屏蔽筒置于 ^{3}He—^{4}He 混合室内，铝粉末和液氦有着良好的接触。铌屏蔽筒的内径为 0.508 cm、长度为 2.5cm，沿轴向的俘获磁场强度为 546 高斯，铝处在常导态。温度变化时，铝粉末的磁化强度随之变化，检测线圈中的磁通也作相应的变化，工作在磁通锁定状态的 SQUID 系统的输出电压正比于铝粉末的核磁化强度。实验结果表明，此输出电压和温度的倒数成线性关系，斜率为 1.5×10^{-2}VK。还测量了铝的核自旋弛豫时间 τ_1 和绝对温度 T 的关系，实验结果表明，τ_1 和 $1/T$ 成正比，比例系数为 1.75 ± 0.05SK，与柯令加定律一致。因此，如果确知柯令加常数，便可以对该温度计进行标定。此温度计的优点是：1. 由静核磁化强度的测量便可以推算出温度，因而比较简便；2. 从核自旋弛豫时间的测量，便可以标定温度计；3. 磁性杂质不影响测量结果；4. 可以连续测量，基本上没有自热效应；5. 灵敏度较高。

§5.6 核磁共振谱仪[16]

一、工作原理

我们知道，具有本征磁矩和感应磁矩的磁介质处在外磁场中时，这些磁矩沿磁场方向取向。在一定的外磁场强度和温度下，磁矩在各个可能方向上的分布服从一定的统计规律。由于磁矩的取向，原来的能级发生分裂。核磁矩也服从同样的规律。如果再在垂直于磁场 H 的方向上加一个高频交变磁场，当交变磁场的圆频率 ω 满足下式所表示的共振条件，即

$$\mu_N H = \hbar\omega$$

时，原来已达平衡分布的核自旋系统，从这个交变磁场中吸收能量，发生能级之间的跃迁，偏离原来的平衡分布，相应地，磁化强度在外磁场方向的平均值也偏离原来的平衡值。当交变磁场的频率偏离共振频率或去掉交变磁场时，偏离平衡分布的核自旋系统，又向平衡态弛豫，磁场方向的平均磁化强度也要回到原来的值。通过测量一定外磁场下相应于各种特定频率的共振谱线和磁化强度的变化，即可得到许多有关物质内部结构和相互作用的信息。上面所谈的是核磁共振谱仪的工作原理。

可见，核磁共振谱仪主要由三部分组成，一是高稳定度、高均匀度的恒稳磁场 H_0，二是与 H_0 垂直的高频磁场 H_1，三是样品磁化强度平均值的检测和记录系统。SQUID 核磁共振谱仪和常规核磁共振谱仪的区别在于：恒稳磁场 H_0 是由超导磁体提供的；利用 SQUID 系统检测和记录样品磁化强度，如图 5.16 所示。样品置于恒稳磁场 H_0 中。为了保持 H_0 的长期稳定不变，除磁场 H_0 的线圈外，还有一个超导屏蔽筒，以抵消磁场的微小波动。为了检测样品核磁化强度的变化，在样品上或样品杜瓦外壁上绕有一个超导检测线圈，这个检测线圈经超导线和 SQUID 的输入线圈连接在一起，组成超导磁通变换器。加到样品上的高频交变磁场 H_1 是由一对鞍形线圈提供的。在需要对样品进行变温测量时，则把超导检测线圈和样品分开，超导检测线圈处于液氦温度，样品处在一个可变温度的恒温器中。

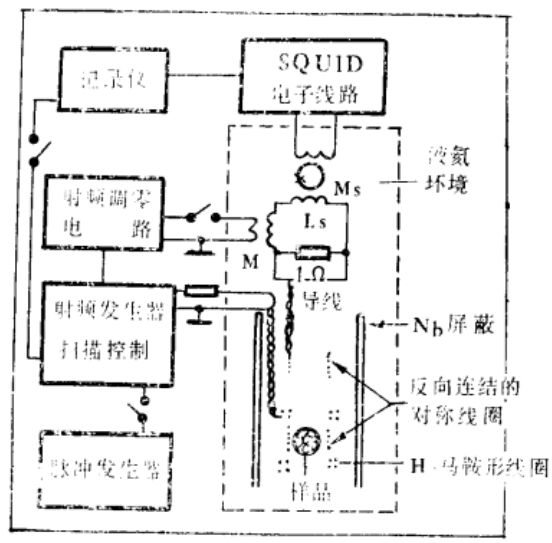


图 5.16 SQUID 核磁共振谱仪原理图

SQUID 核磁共振谱仪，和常规核磁共振谱仪一样，有脉冲工作方式和连续波工作方式。

对于脉冲工作方式，加到鞍形线圈的高频脉冲的持续时间为 τ，而高频信号的频率正好等于共振频率。在脉冲后沿，核自旋系统偏离平衡值达到一个稳定状态。交变磁场取消后，样品的磁矩向平衡态弛豫，SQUID 系统即可连续地记录下来磁化强度的变化和整个弛豫过程。

对于连续波工作方式，加到鞍形线圈上的高频信号频率是变化的。当频率从低到高，到共振频率时，核自旋系统偏离平衡分布。频率比共振频率高时，核磁矩又趋向平衡态时的值。这样，交变磁场的频率从低到高，每经过共振频率一次，SQUID 系统即可记录一条共振曲

线。利用这条曲线，即可分析样品的有关特性。

在一般情况下，如果高频磁场 H_1 直接耦合到超导检测线圈上去，SQUID 系统的信噪比将严重恶化。为改善信噪比，除检测线圈按一阶磁场梯度计输入线圈的程式外，还要求 H_1 的方向和检测线圈严格垂直。实验上要作到这一点是困难的。现在通常在检测线圈上并联一个 1Ω 左右的小电阻 R，用来短路掉直接耦合到检测线圈上的高频信号。R 值要合适，过大起不了作用；过小时，回路时间常数 L/R 大，响应速度太慢。一般选择 L/R 使得响应时间可以满足要求，如 10^{-6}S。这时可观测的弛豫过程的弛豫时间约为 $10^{-5}\sim10^{2}$S。

二、特性

常规核磁共振谱仪是测量当恒稳磁场强度 H_0 慢慢变化通过共振点时，环绕样品的检测线圈输出电压的变化情况。在共振点，$H_0=\frac{\omega_0}{\gamma}$（$\gamma$ 为磁旋比，ω_0 为共振圆频率），检测线圈的输出电压 V 为：

$$V=K\eta(\pi Q\omega_0 V_c R)^{1/2}\chi'' H_1$$

式中 K 为常数，它的大小决定于检测线圈的几何形状；η 为检测线圈中样品的填充因子；Q 和 V_c 分别为检测线圈的品质因数和体积；R 为并联电阻；χ'' 为样品复数磁化率的虚部。输出电压 V 取极大值的条件是：

$$(\gamma H_1)^2 T_1 T_2=1$$

式中 T_1 为自旋——晶格弛豫时间，T_2 为自旋——自旋弛豫时间，γ 为磁旋比。共振时，

$$\chi'' H_1=\frac{\chi_0 H_0}{4}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2}$$

式中 χ_0 为静磁化率。常规核磁共振谱仪的噪声电压 V_N 为：

$$V_N=(4K_B TRBF)^{1/2}$$

式中 B 为测量系统的带宽，F 为测量系统的噪声指数，K_B 为玻尔兹曼常数，T 为并联电阻 R 的绝对温度。因此，常规核磁共振谱仪的信噪比为：

$$\frac{V}{V_N}=\frac{K\eta(\pi Q\omega_0 V_c)^{1/2}\chi_0 H_0\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2}}{4(4K_B TBF)^{1/2}}$$

SQUID 核磁共振谱仪工作在连续波方式时，样品磁化强度在 H_0 方向的相对变化量为：

$$\frac{\Delta M_z}{M_z}=\frac{(\gamma H_1)^2 T_1 T_2}{1+(\gamma H_1)^2 T_1 T_2} \tag{5.74}$$

假定高频磁场 H_1 在样品体积内是均匀的，那么，当 $\Delta M_z=M_z=\chi_0 H_0$ 时信号达极大值，并与 T_1、T_2 无关。耦合到 SQUID 环中的磁通 ϕ_s 为：

$$\phi_s=\left(\frac{MN}{L_p+L_i}\right)\Delta\phi$$

式中 M 为输入线圈和 SQUID 环之间的互感，N 为检测线圈的匝数，L_p 为检测线圈的自感，L_i 为输入线圈的自感，$\Delta\phi$ 是当磁场逐渐增加通过共振点时检测线圈中的磁通变化量，

$$\Delta\phi=\mu_0\Delta M_z A$$

式中 μ_0 为真空磁导率，A 为样品截面积。对圆柱体样品，$A=\pi r^2$，r 为圆柱样品半径。

在 $L_p = L_i$，磁通变换器的磁通变换系数最大的情况下，圆柱样品在 SQUID 环中产生的磁通变化为：

$$\phi_s = \pi r^2 \mu_0 \chi_0 H_0 \left(\frac{MN}{2L_p}\right)$$

SQUID 系统的磁通噪声的典型值为：

$$\phi_N = 10^{-4} \phi_0 B_s^{\frac{1}{2}}$$

式中 ϕ_0 为磁通量子，B_s 为 SQUID 系统的带宽。

SQUID 核磁共振谱仪的信噪比为：

$$\frac{\phi_s}{\phi_N} = \frac{\pi r^2 \mu_0 \chi_0 H_0 \left(\frac{MN}{2L_p}\right)}{10^{-4} \phi_0 B_s^{\frac{1}{2}}}$$

常规核磁共振谱仪和 SQUID 核磁共振谱仪的信噪比的比为：

$$\frac{\phi_s}{\phi_N} : \frac{V}{V_N} = \frac{4\pi r^2 \mu_0 (4K_B TBF)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{MN}{2L_p}\right)\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{2}}}{10^{-4} \phi_0 B_s^{\frac{1}{2}} K\eta (\pi Q \omega_0 V_c)^{\frac{1}{2}}}$$

将两种核磁共振谱仪的数据代入，即 $\frac{MN}{2L_p} = \frac{1}{11}$，$r = 1.5 \times 10^{-3}\text{m}$，$V_c = 7 \times 10^{-8}\text{m}^3$，$Q = 100$，$\eta = 1/2$，$K = 1$，$F = 1$，$B = 1\text{H}_z$，$T = 300\text{K}$，$B_s = 1\text{Hz}$ 代入，得到，

$$\frac{\phi_s}{\phi_N} : \frac{V}{V_N} = \frac{2.2 \times 10^3}{\omega_0^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

由此式可知，SQUID 核磁共振谱仪特别适用于 H_0 较小情况下自旋——晶格弛豫时间长、自旋——自旋弛豫时间短的材料分析研究工作。如果设 $T_1 = 100\text{ S}$，$T_2 = 1\text{S}$，磁旋比 $\gamma = 2.037 \times 10^4$，则常规核磁共振谱仪和 SQUID 核磁共振谱仪的灵敏度在 $H_0 = 3.8 \times 10^3$ 高斯下相等。在更低磁场下，SQUID 核磁共振仪比常规核磁共振谱仪优越得多。

在脉冲工作方式时，SQUID 核磁共振谱仪和常规核磁共振谱仪的信噪比之比为：

$$\frac{\phi_s}{\phi_N} : \frac{V}{V_N} = \frac{2\pi r^2 \mu_0 (4K_B TBF)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{MN}{2L_p}\right)}{10^{-4} \phi_0 B_s^{\frac{1}{2}} K\eta (\pi Q \omega_0 V_c)^{\frac{1}{2}}}$$

将上面的 $\frac{MN}{2L_p}$、r、V_c、Q、K、F、η、T 的数值代入，得到

$$\frac{\phi_s}{\phi_N} : \frac{V}{V_N} = \frac{1.1 \times 10^3}{\omega_0} \left(\frac{B}{B_s}\right)^{\frac{1}{2}}$$

由此式可以得到与连续波工作方式相似的结论。不过需要指出的是，脉冲方式工作时的带宽一般比连续波工作时为大。对于 SQUID 核磁共振谱仪，带宽必须大到时间尺度 T_1 内变化的信号不被歪曲。而在常规核磁共振谱仪中，带宽必须大于足以检测自旋系统的自由感应衰减。SQUID 核磁共振谱仪经常用在脉冲工作方式，这是因为可以观察整个弛豫过程，这种观察不受 T_2 的影响，而常规核磁共振谱仪不具有这种性质。这就使 SQUID 核磁共振谱仪

不单具有在低磁场下的高灵敏度，而且特别适宜于极低温下研究物质内部的一些弱相互作用的弛豫过程，如量子液体的磁性质、金属中自旋——晶格弛豫过程等。此外，它还可以用来测量样品的磁化强度和磁化率，以及极低温度。

§5.7 电压比较仪和电流比较仪

基于约瑟夫逊效应的电压基准监视方法促进了高精密电压比较仪及电流比较仪的发展。下面介绍这种电压基准监视系统及用于这种系统的电压比较仪和电流比较仪。

一、电压基准监测系统

在国际单位制中，电动势的单位是伏特。为了用实物复现伏特单位，目前普遍使用的是韦斯顿硫酸镉标准电池组，以各个电池电动势平均值作为伏特基准值，约为1.0186V，每年的漂移约为几个μV。即它的精密度只有10^{-6}，不能满足现代化生产和科学技术的要求，因此，人们迫切需要一种新的完善的电压基准监视系统，利用它可以就地发现每个电池电动势的绝对变化量，并对这一变化量进行必要的修正。基于约瑟夫逊效应的电压基准监视系统就是这样的理想系统，利用它已经把电压基准的精密度提高了一、二个数量级。该系统的工作原理如下。

如第二章所说，用微波照射超导结，它的直流伏安特性曲线上呈现一系列的常电压电流阶梯。第n个电流阶梯处的电压V_n和微波频率f的关系为：

$$V_n = n\frac{h}{2e}f$$

可以看出，选定某一序号n的电流阶梯，精确测出物理常数$2e/h$及微波频率，就可以精确地定出该电流阶梯相应的电压V_n。

利用该超导结监视标准电池电动势E_s的原理就在于：设法建立起V_n和E_s的关系。借助于精确测得的V_n来确定E_s。通过对同一标准电池在不同时间内进行测定，就可以得到E_s随时间的变化。图5.17示出原理线路。它是利用电阻分压器作为电压比较仪的。R_1和R_2是阻值稳定的电阻，G_1和G_2为检流计，E_s为标准电池，E_1和E_2为稳定的直流电源。E_1提供的电流I_0流过R_1、R_2，在R_1和R_2上产生电压U_1和U_2。调节r_1可以改变U_1和U_2。E_2提供的电流I_j流过超导结。调节r_2可以改变I_j，使超导结的工作点恰好在电流阶梯的中点附近。当调节I_0和微波频率f的数值使检流计G_1、G_2达到平衡时，显然有

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{E_s}{V_n}$$

或

$$\frac{2e}{h} = \frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{nf}{E_s}$$

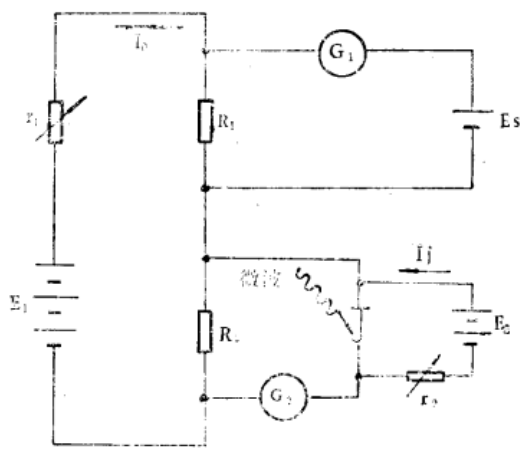


图5.17 约瑟夫逊电压基准监视系统原理图

可见，先将电流调到平衡，再精确地测量$2e/h$、R_1/R_2、f，便可以得到该标准电池的电动

势 E_s。如今，精确测定频率 f 是不成问题的，精确度可以达到 10^{-9} 以上。测量 $2e/h$ 的精确度可以达到 10^{-8}。R_1/R_2 的精确度可提高到 10^{-8}，于是，确定 E_s 的精确度也可以达到 10^{-8}。

二、电阻式电压比较仪

通过几个超导结的串联，可以实现 10mV 量级的电流阶梯，而标准电池的电动势约为1V，因而，图 5.17 中的 R_2/R_1 选择为 1/100。

采用固定比例 1/100 的电阻式电压比较仪和具有多个读数盘的电位差计相比较，前者无变动触点带来的误差，有可能达到更高的测量精度。

在实用的电阻式电压比较仪中，固定比例 1/100 是通过串并联交换法或级联交换法实现的[17,18]。

电阻式电压比较仪的进一步完善，是使其工作在液氦温度，最好工作在超流氦中。这样作的优点是：第一，消除了接点电阻、连线电阻、开关电阻，因而勿需补偿电路；第二，把传送小信号的元件和导线放在超流氦中，能消除热电动势的干扰；第三，置于液氦中的元件的泄漏电流很小，不需另加防泄漏措施，这是因为电阻元件表面上的污物凝成绝缘固体。但液氦外的元件泄漏问题仍需解决；第四，测量误差可以减小到仅决定于低温电阻的热噪声，而其他因素对测量精度不起什么作用。

实现高精度电阻式电压比较仪的关键在于：

第一，研制出一种电阻材料，其电阻率在温度为 2K 附近不随温度变化，满足这个要求的材料应是高电阻率的、含磁性杂质很少并具有小的磁阻效应的合金。

D.B.Sullivan 利用硅青铜(含铜 96%，含锌 1%，含硅 3%)[19]，该材料在 2K 时电阻率为 18.3 $\mu\Omega\cdot$cm，电阻温度系数为 $-2\times10^{-6}K^{-1}$，J.C.Gallop 利用磷青铜(约含铜 95%，含锡 5%，含磷 0.2%)[20]，该材料在4.2K时电阻温度系数 $-4\times10^{-6}K^{-1}$；V.Kose 利用铝镁合金(铝 95%，镁 5%)，该材料在 2—4K 时电阻温度系数为 $2\times10^{-7}K^{-1}$，剩余电阻率为 3.6$\mu\Omega\cdot$cm。

第二，由于超导结和波导间的阻抗匹配很差，必需的微波功率要高达几百 mW。这些能量被低温器件吸收，变成热能，使其温度上升。为解决这个问题，就需要利用温度控制系统把温度控制到±1mK。

第三，各个电阻是用超导焊料连接成电路的，因此，通常金属和超导金属间的接触电阻即接点电阻就成为串联电阻的一部分。该电阻值不是固定不变的，它是温度和通过接点的电流的函数。这是因为：两种金属接触后要产生邻近效应。在界面的通常金属一侧，邻近界面的一个薄层内(薄层厚度为相干长度的数量级，即 10^{-5}cm)具有超导电性；在超导体一侧的薄层内，超导电性有所减弱。当接点温度、通过接点的电流变化时，这个薄层厚度也跟着变化，使接点电阻变化。为减小这种影响，D.B.Sullivan 把硅青铜电阻丝端点搪上超导锡层[19]。I.K.Harvey 把电阻丝端点焊上一个铜杯，杯中灌上超导锡焊料，用以增加界面面积并使该面积成为固定不变的[21]。

三、电流比较仪

室温电流比较仪的核心部分是一个高磁导率的轮形磁芯，上面绕了三个线圈。第一个线圈的匝数为 N_1，通有电流 I_1。第二个线圈的匝数为 N_2，通有电流 I_2，这两个电流在磁芯

中的磁场方向是相反的，该磁场由第三个线圈即检测线圈来测量。由电磁学的安培环路定律，

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = N_1 I_1 - N_2 I_2$$

式中$\vec{H}$为磁芯中的磁场强度。当$\vec{H}=0$时，

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = 0$$

或

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

这就是说，当磁通检测器的指示为零，系统的安匝数平衡时，第一个线圈和第二个线圈中的电流比等于第二个线圈和第一个线圈的匝数比。这就是电流比较仪的原理。

超导电流比较仪的原理和室温电流比较仪相似，它的核心部分也是两组线圈和一个磁通检测器，只是结构不同罢了。说明如下：超导管中装入一束导线。由于迈斯纳效应，这束导线中的任一根导线中的电流都会在超导管内壁上感应出电流。该电流与导线中的电流大小相等而方向相反，它流到管端，再反方向沿超导管的外壁流动。在离管端一定距离的外壁上的电流分布与这根导线在超导管内的位置无关。这样，如果导线束中的两根导线中的电流大小相等而方向相反，那么，它们在超导管外面的磁场抵消。利用工作在磁通锁定状态的 SQUID 可以很灵敏地检测出这个磁场是否抵消。当测知$\vec{H}=0$时，就表示这两根导线中的电流比为 1∶1。进而，把这束导线中的N_1根导线串接起来，通上电流I_1；把另外N_2根导线串接起来，通上电流I_2，I_2的方向和I_1相反。当 SQUID 的输出为零时，就表示$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$。这就是超导电流比较仪的原理。这两组导线叫比例绕组。在实用超导电流比较仪中，SQUID 要进行超导屏蔽，使得各连接导线中电流的磁场不干扰 SQUID。

文献[22—25]中描述了四种电流比较仪。文献[25]描述的电流比较仪的结构较新颖：比例绕组和检测线圈间的超导屏蔽采用特殊的螺旋形结构，在很小体积内即可获得很大的屏蔽长度。该屏蔽部分位于比较仪端部而不在中心部分，可得到较大的可利用中心面积，便于绕制较多匝数的比例绕组。此外，由于采用了新型低温磁性材料，使得灵敏度可达4×10^{-11}安匝，比例误差为2.5×10^{-11}(150匝∶150匝)

电流比较仪的应用很广。例如，在基于约瑟夫逊效应的电压基准监视系统中，电流比较仪用来校准工作在低温的电阻分压器；用来校准在常温下工作的标准电阻；用来测量低温电阻及电阻温度系数；用来作为低温电阻温度计等。这里介绍它在校准电阻比中的应用，如图5.18。这是一个桥式线路。N匝的线圈L_1、1匝的线圈L_2和1匝的线圈L_3全是用超导线绕制的，换向开关及全部引线也是用超导材料制作的，其上无电压，因此，待校准电阻R_1和R_2上的电压相同，设这二个电阻的阻值为NR和$(1+\delta)R$，δ为待测的修正量，则得，

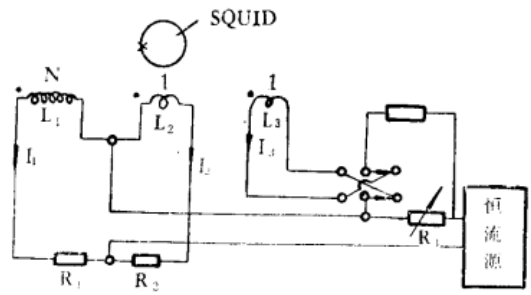


图 5.18　利用电流比较仪校准电阻的电路

$$I_1 NR = I_2(1+\delta)R$$

或

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1+\delta}{N}$$

调节电阻 R_3，改变线圈 L_3 中的电流 I_3，直到 RF-SQUID 系统的输出为零，这时，由安培环路定律得到，

$$I_1N - I_2 \cdot 1 - I_3 \cdot 1 = \oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = 0$$

由以上二式容易得到，

$$\delta = \frac{I_3}{I_2}$$

下面，我们还要介绍电流比较仪在 SQUID 电阻电桥中的应用。

§5.8 电阻电桥[26]

利用通常的电阻电桥或电位差计测量微小电阻，其测量精度和分辨率都不高。将电阻电桥和 SQUID 结合起来组成 SQUID 电阻电桥，则可以使小电阻的测量灵敏度显著提高。

这种电桥的工作原理如图 5.19 所示。左侧电路由电源 E、电阻 r_1、电感 L_1 组成，通有电流 I_1。右侧电路由电阻 r_2、电感 L_2 组成，由工作在磁通锁定模式的 SQUID 输出端供电，电流为 I_2。L_3 为信号线圈，与 SQUID 环感性耦合。电阻 r_1 和 r_2 的上端与 L_3 相接，而下端短路。开始工作时，改变电源 E 的输出电压，使 I_1 达到一定的值，如果 SQUID 系统的输出开始时为零，那么线圈 L_3 中就会有电流，该电流的磁通耦合到 SQUID 环孔中，SQUID输出不为零，I_2 增加，直到 I_2 增加到使得 $r_1I_1 = r_2I_2$ 时，L_3 中无电流，整个桥路达到平衡时为止。设想 I_1 由于某种原因有了变化，则 I_2 会跟踪这个变化，使电桥始终保持平衡。假定 r_1 是已知电阻，r_2 是待测电阻，那么，

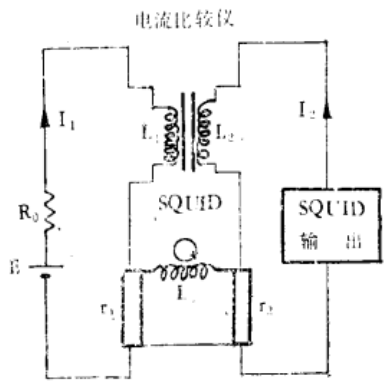


图 5.19 SQUID 电阻电桥的示意图

$$r_2 = \frac{r_1 I_1}{I_2}$$

可以看出，只要设法测出 $\frac{I_1}{I_2}$，就可以算出 r_2 来。通常，直接利用电流比较仪测量 $\frac{I_1}{I_2}$，图中线圈 L_1 和 L_2 就是电流比较仪的比例绕组，电流比较仪的检测线圈及其他部分未画出。用这种方法测量 $\frac{I_1}{I_2}$ 的精度可以很高，达到 10^{-8} 并不困难。只要电阻 r_1 的精度足够高，r_2 的测量精度也可以达到同等精度。该电路可以测量的最小电阻一般为 $10^{-5}\Omega$。

如果需要测量更小的电阻或电阻的微小变化，则可以利用两个电阻 R_1 和 R_2 分别代替线圈 L_1 和 L_2，测量二电阻上端点 a 和 b 间的电压即电桥的输出电压 U_{ab}。与上面的电桥工作原理相似，当左侧电路中有电流 I_1 时，由于 SQUID 的反馈作用，电桥会自动地保持平衡，即 $r_1I_1 = r_2I_2$。此时 U_{ab} 由下式表示，

$$U_{ab} = I_2R_2 - I_1R_1 = I_2R_2\left(1 - \frac{r_2R_1}{r_1R_2}\right)$$

如果待测电阻 r_2 由于某种原因发生微小变化 Δr_2，电桥输出电压相应的变化量为：

$$\Delta U_{ab} = \frac{I_2 R_1}{r_1} \Delta r_2$$

式中 $I_2 \Delta r_2$ 为待测电阻的阻值变化 Δr_2 后，待测电阻两端电压的变化量。在微小电阻测量中，$\frac{R_1}{r_1}$ 比 1 大很多，电桥所检测的电压变化量，比之待测电阻上的电压变化量扩大了 $\frac{R_1}{r_1}$ 倍，因而也提高了检测电阻 r_2 变化量的分辨率。

若测量 r_2 的绝对值，改变 R_1 和 R_2，使 $V_{ab} = I_2 R_2 - I_1 R_1 = 0$。由于 SQUID 自动保持 $I_1 r_1 = I_2 r_2$，因而有

$$r_2 = r_1 \frac{R_2}{R_1}$$

这种电桥的稳定性不受电源的影响，主要决定于各个电阻的稳定性。一般 r_1、R_1、R_2 都用稳定性很高的材料组成。而且由于这种电路的对称性，也大大减小了环境变化对测量的影响。在要求较高的测量中，还可以把这些电阻都浸在液氦中，以减低热噪声对测量的影响。这种电桥可以测量的最小电阻值约为 $5 \times 10^{-8}\Omega$。

§5.9 其他 SQUID 仪器

一、用于超流液氦研究的温度梯度计[27]

为研究超流液氦的涡旋线运动，必须测量 $cm^{-1} \cdot \mu K$ 量级的温度梯度，并且要求对超流液氦的扰动要小。通常的测温技术不能胜任这种高灵敏度、低扰动测量工作。为此，有人提出一种 SQUID 温度梯度计。它的核心部分是一个交流电桥，电桥的两个臂是超导薄膜，另两个臂是固定电阻的康铜丝，SQUID 跨接在电桥对角线上，作为零指示仪。超导薄膜的环境温度被调整到超导薄膜的超导态和常导态的转变温区内的某一定点上，约 10mK，用来作为热辐射计。当两个超导薄膜的温度差为给定值时，电桥平衡。温度差偏离该值时，电桥失衡，失衡电流由 SQUID 检测，并作为温度梯度的量度。

实验结果表明，该温度梯度计的灵敏度取决于电桥元件的热噪声、SQUID 的噪声及环境温度的涨落，前两个噪声为 $10^{-10} AHz^{-1/2}$，电桥电流为 1mA 时的温差噪声为 $10^{-9} KHz^{-1/2}$。环境温度涨落产生的温差噪声为 $10^{-8}K$ 的量级。

不同的超导薄膜有着不同的噪声。颗粒状铝膜的噪声较小。对于 60nK 的温差，相应的温差噪声为 6nK。

该温度梯度计的优点是：对液氦流动的干扰较小，可以就地测量；它的热容小，而表面积和体积比较大，同液氦的热匹配较好。主要缺点是：只能用于一个温度。若采用临界温度不相同的几种超导薄膜，并利用磁场连续调变超导薄膜的临界温度，则可以部分克服这个缺点。

二、测量弱磁场的绝对强度[28]

为研究材料在 mK 到 μK 温区的性质(如低临界温度超导体的性质)，不仅需要测量弱磁场的相对变化量，而且需要测量它的绝对强度，所用传感器尺寸要小，冷量损失也要小。能满足这些要求的弱磁测量仪器很少。SQUID 很灵敏，可用来测量弱磁场的相对变化，但无

法测量绝对强度，为此，有人提出了一种可以测量磁场强度绝对值的新方法。它的工作原理如下：无定向线圈、磁通变换器、SQUID 输入线圈连结成超导回路。待测外磁场方向沿无定向线圈轴线。用作传感器的超导体置于无定向线圈的一个线圈内。如果降温使该超导体温度低于它的临界温度，由于迈斯纳效应，超导体内部的磁场变为零，磁化强度的变化量等于磁场强度的绝对值。超导回路由于总磁通守恒，回路中感应出电流，感应电流正比于超导体所在处的磁场强度绝对值，感应电流的流向和磁场方向有关，由 RF-SQUID 测量这个电流后便可以定出该磁场强度的绝对值和方向。

三、射频衰减测量[29,30]

它的原理是：超导结跨接在一段阻抗很低的 X 波段波导管上，形成一个单结 SQUID 环。该 SQUID 环用微波偏置，微波频率为 9GHz。30MHz 的射频信号经待测衰减器，沿 50Ω 的同轴电缆传送，该电缆的内导体和 SQUID环作感性耦合。直流偏置电流和音频电流(1KHz 的方波)也经此内导体和 SQUID 环作感性耦合。于是，作用在 SQUID 环中的磁通包含微波、射频、音频及直流磁通。射频磁通及音频磁通作为准静态外磁通。正如第三章所说，SQUID 环电流是准静态外磁通的周期性函数，周期为 $1\phi_0$。由于 SQUID 环是一个微波负载，它吸收一部分微波能量，而另一部分能量被反射。利用微波读出电路来测量射频信号变化时所产生的微波反射系数的变化。

理论和实验均指出，相敏检波器输出的电压正比于以 $\frac{2\pi I_m}{I_0}$ 为宗量的零阶贝塞尔函数，其中 I_m 为射频电流幅度，I_0 为 SQUID 环中的磁通变化一个磁通量子所需要的流经内导体的电流。因此，将待测可变衰减器接到射频输入电路中，首先将衰减量调到最大，然后使其逐渐减小直到出现第一个零点，记下衰减器刻度 A_1；继续减小衰减量，则依次出现第二、三、…个零点，记下相应的衰减量刻度 A_2、A_3、……。设贝塞尔函数的第 K 个零点的宗量为 x_K，相应的射频电流幅度为 I_{mK}；第 l 个零点的宗量为 x_l，相应的射频电流幅度为 I_{ml}，则有

$$x_K = \frac{2\pi I_{mK}}{I_0},\quad x_l = \frac{2\pi I_{ml}}{I_0},$$

$$\frac{x_K}{x_l} = \frac{I_{mK}}{I_{ml}}$$

衰减量的分贝数为：

$$20\log\frac{I_{mK}}{I_{ml}} = 20\log\frac{x_K}{x_l}$$

可见，记下零点的个数，再利用贝塞尔函数表，查出相应零点的宗量数值 x_K 和 x_l 就可以定出衰减量。例如，贝塞尔函数的头几个零点的宗量为 2.4048，5.5021，8.6531，11.7915，14.9309，……，后一个宗量和相邻的前一个宗量的比值依次为 2.2954，1.5677，1.3626，……，相应的分贝数依次为：7.217，3.905，2.876，2.050，……，这种测量可以延伸到第 900 个零点，相应的衰减为 62 分贝。

此外，SQUID 还可以用来测量环电感[31]、微桥结的电流——位相关系[32]、超导序参量的变化[33]、小的线位移[34~36]，RF-SQUID 的变种 R-SQUID 还可用来测量温度及热容量[37,38]。

参 考 文 献

[1] J.Clarke et al., *J. Low Temp. Phys.*, 37, 405(1979)

[2] R. L. Forgacs, *Rev.Sci. Instrum.*, 38, 214(1967)

[3] M. Nisenoff, *Rev. Phys. Appl.*, 5, 21(1970)

[4] J. E. Mercereau, *Rev. Phys. Appl.*, 5, 13(1970)

[5] W. W. Webb, *IEEE Trans.*, Mag-8, 51(1972)

[6] J. M. Goodkind, *Rev. Sci. Instrum.*, 41, 799(1970)

[7] J. E. Zimmerman, *Cryogenics*, 12, 19(1972)

[8] A. Davidvon et al., *Rev. Sci. Instrum.*, 45, 838(1974)

[9] M. B. Ketchen et al., *J. Appl. Phys.*, 49, 4111(1978)

[10] C. M. Pegrum et al., «*SQUID'80, superconducting guantum interference devices and their applications*», Pro. I. C. SQUID 1980, W. de Gruyter, Berlin, 1980, p. 535

[11] V. J. de Waal et al., *Appl. Phys. Lett.*, 41, 669(1982)

[12] V. J. de Waal et al., *J. Low Temp. Phys.*, 53, 287(1983)

[13] K. Shirae et al., *Cryogenics*, 21, 707(1981)

[14] J. S. Bhilo et al., *Rev. Sci. Instrum.*, 48, 1529(1977)
B. S. Deaver et al., «*future trends in superconductive electronics*», p.58

[15] L. A. Moberly et al., *IEEE Trans.*, Mag-13, 358(1977)

[16] R. A. Webb, *Rev. Sci. Instrum.*, 48, 1585(1977)

[17] T. F. Finnegan, *Rev. Sci. Instrum.*, 44, 944(1973)

[18] A. Denenstein et al. *Rev. Sci. Instrum.*, 45, 735(1974)

[19] D. B. Sullivan, *Rev. Sci. Instrum.*, 43, 499(1972)

[20] J. C. Gallop et al., *IEEE Trans.*, IM-21, 310(1972)

[21] I. K. Harvey et al., *Rev. Sci. Instrum.*, 44, 1700(1973)

[22] I. K. Harvey et al., *Rev. Sci. Instrum.*, 73, 1626(1972)

[23] D. B. Sullivan et al., *Rev. Sci. Instrum.*, 45, 517(1974)

[24] K. Grohmann et al., *IEEE Trans.*, IM-23, 261(1974)

[25] 薛寿清，低温和超导技术规划和学术会议论文，1981

[26] B. R. Barnard et al., *Journal de physique*, 39, C6-1219(1978)

[27] E. J. Yavmchuk et al., *Rev. Sci. Instrum.*, 49, 460(1978)

[28] K. Kosuge et al., *Cryogenics*, 20, 223(1980)

[29] R. T. Adair et al., *IEEE Trans.*, IM-23, 375(1974)

[30] R. A. Kamper et al., *Proc. IEEE*, 61, 121(1973)

[31] S. S. Pei et al., *J. Appl. Phys.*, 46, 2257(1975)

[32] S. S. Pei, *A dissertation for the degree of doctor philosophy in physics, State University of New York*, 1977

[33] J. A. Pals et al., 同[10], p.558

[34] L. Adami et al., *Appl. Phys. Lett.*, 30, 240(1977)

[35] W. L. C. Rutten et al., *Cryogenics*, 22, 457(1982)

[36] M. J. Peters, et al., *Cryogenics*, 22, 267(1982)

[37] R. J. Soulen et al., *J. Low Temp. Phys.*, 40, 553(1980)

[38] J. G. Park et al., *J. Low Temp. Phys.*, 40, 247(1980)

第六章　超导结和SQUID的制备

§6.1　点接触结和点接触结SQUID的制备

点接触结按结构形状可分为螺钉型结和触须状结两类。

螺钉型点接触结常用在SQUID中，螺钉尖端的锥角通常为60～120度或更大。螺钉尖端的电感和电容很小，只占总电感和总电容的很小部分。

触须状结的触须是由直径为0.1～1mm的超导丝用机械或化学刻蚀方法制成的，锥角一般小于6度，它有较大的电感和较小的电容，仅适用于高频工作。

为了得到稳定可靠的点接触结，在设计和制作上必须作到以下几点：

1．结构要坚固，并尽可能与外界震动相隔离，切忌撞击；

2．应避免冷热循环中温度不均匀所引起的相对形变。为此，应选用导热性能良好，结构对称性高的材料，并采取防热冲击装置；

3．应防止冷热循环中由于热胀系数不均匀所致的结构形变。为此，应选用热学性能均匀的同种材料；

4．应避免绝缘材料与超导材料之间热胀系数差别的影响。为此，尽量选用与超导材料有相同热胀系数的绝缘物；

5．应防止结区的水汽凝结和气体的腐蚀。为此，要采取充氮气密封措施；

6．尽量防止电脉冲对触点的影响。为此，应采取有效的电磁屏蔽措施和正确的测试方法；

7．结的支架、调整、偏置、扼流、热电防护装置等也需一并合理设计。

下面具体介绍RF-SQUID探头的制备。

点接触结RF-SQUID探头有单孔的、双孔的和输胎形的几种。它们的制备工艺大同小异。现以对称双孔RF-SQUID探头为例来说明。

1．设计

第三章中已指出，RF-SQUID环电感L最好约等于ϕ_0/I_c，一般超导结的临界电流I_c为μA量级，此时，$L\approx5\times10^{-10}$H。另外，环电感L减小时，RF-SQUID的磁通分辨率高，但L太小时，RF-SQUID环和输入线圈间的耦合系数变小，会使整个系统的能量分辨率ε变坏。ε的大小取决于环孔面积和它的几何设计，实验发现，对于单孔或双孔结构，2mm直径的孔近于最佳尺寸。双孔结构的高度为10mm时，环电感约为5×10^{-10}H。

R.A.Buhrman等人[1]设计的双孔RF-SQUID探头及尺寸示于图6.1α。

R.P.Giflard和J.E.Zimmerman等人[2,3]设计的RF-SQUID探头示于6.1b。它的主体是直径9.5mm、总长25.4mm的铌柱。两个对称孔的直径均为2.1mm，长为10.2mm。铌柱两端膛孔的内径为6.4mm。对称孔之间的狭缝宽度为0.1mm。这是一种典型结构。

2．点接触结的制作

点接触结常用000～120铌丝加工制成，为了减小电感，铌螺钉锥角为60～120度。螺钉尖

率半径约为几个 μm，可采用逐级变细的金相砂纸研磨，尔后用电化学刻蚀的方法得到。铌台的台面经精细研磨后进行机械抛光或电抛光。

R.A.Buhrman 等人认为点接触结制作的关键是铌螺钉的氧化工艺。他们是把铌螺钉放在约 150°C的空气中氧化几分钟，直到观察到金黄色——蓝色的相干色出现为止。文献[4]采用了类似工艺，但氧化温度约为 300°C

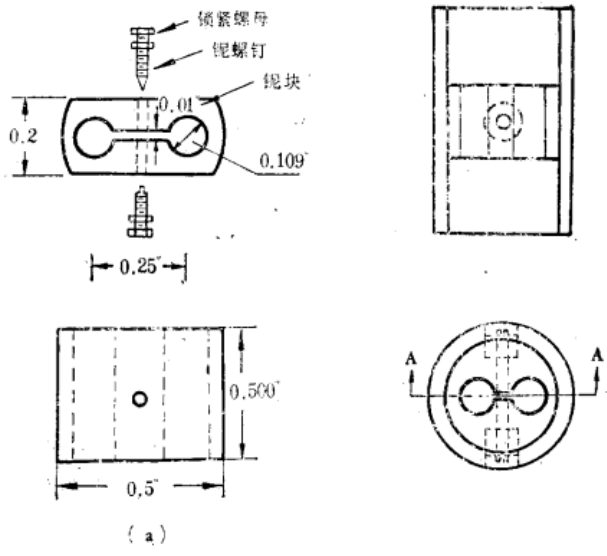


图 6.1 点接触结 RF-SQUID 的两种结构

热氧化工艺的好处是：易于在室温或低温下进行结的调节；这种结具有较强的抗电脉冲能力，从而可靠性好。这可能是因为氧化后使接触处产生氧化层，呈松散状，起着支撑触点尖端，减缓外界震动的影响。若采用阳极氧化结，则因氧化层质密，效果反而不好。至于抗电脉冲能力主要与结的常导态电阻有关，采用这种氧化方法获得的常导态电阻为几个欧姆，而"干净结"工艺所得到的结常导态电阻为上百欧姆。常导态电阻较小，对外来电脉冲的灵敏度大为降低。

3. 临界电流的调节

通常需要将点接触结的临界电流调节到几个微安。为此，只需调整铌螺钉和铌台间的压力便可。

这个调整可以通过各种微调机构在杜瓦容器外进行。这些机构的共同点是螺钉和调节机之间有足够的回差。有的能在调好后自行脱开。实验时，一面调整，一面观察 RF-SQUID 的输出信号，直到观察到满意的三角波为止。

通常人们总是在室温下调节，调好后再放入液氦中进行实验，这时调节的不是临界电流而是和临界电流有关的结电阻。由于对称双孔 RF-SQUID 中的点接触结是被铌块短路的，无法直接测量结电阻，为此，可采用测量LC 谐振电路的相对品质因数 Q 的方法来确定，首先把一个高频谐振线圈 L_1 插入双孔 RF-SQUID 的一个孔内，再把调幅度 100% 的高频信号输到此谐振线圈上，让铌螺钉尖端和铌台台面不接触，改变谐振电容，使槽路谐振在 30MHz。槽路两端的电压经过放大、检波、同步检波后，在记录仪上得到一个直流输出电压。然后用一个外加的直流电压来抵消这一电压。上述步骤完成后，记下记录仪上的输出电压，然后细心地调节点接触结的螺钉，并在记录仪上观察其电压的变化。当螺钉和台面接触时，由于调变了原来线圈回路的谐振特性，振荡幅度下跌，下跌量间接反映了接触电阻大小。通常调整到下跌 0.2～0.5%时固定螺钉，并用锁紧螺母把螺钉锁住。用少许环氧树酯(其中掺有石英粉，石英粉的比例要恰当，使得它的热胀系数和铌相近)，将铌螺钉和铌台粘牢。粘接及锁紧螺母时，要保持记录仪的输出不变。

4. 封装

封装主要考虑屏蔽、密封和抗震等因素，图 6.2 示出 R.A.Buhrman 等人采用的密封屏蔽结构。将 RF-SQUID 探头固定在支架上，并一起放入密封的镀铅紫铜罐内。谐振线圈可

以插入一个孔内，它的位置要调节，借以得到最佳耦合。镀铅铜罐提供了导热性能良好的超导屏蔽。罐的底部焊上一根黄铜管。该黄铜管下端开口而顶端密封，以供输入线圈插入，而黄铜管正好插入RF-SQUID的另一个孔中。RF-SQUID探头及其支架被固定在罐内，罐的上盖板装有抽气管和密封同轴电缆插座，后者是和谐振电路相接的。盖板下面用铅或铟"O"型圈来密封。抽真空后充入氦气(1个大气压左右)，以备使用。

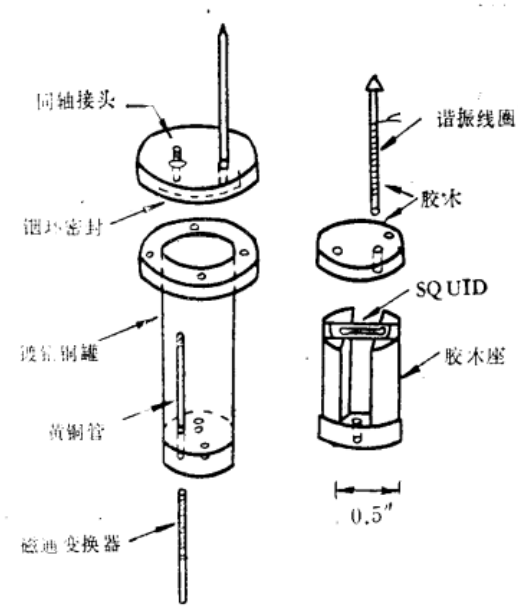


图 6.2　RF-SQUID 探头的密封屏蔽结构

§6.2　微桥结的制备

一、硬超导材料薄膜的制备工艺

为了制作可用的微桥结，首先需要制作可用的超导薄膜。

硬超导材料的熔点都很高，如铌的熔点为2480°C，钽的熔点为3000°C，且极易受气体污染，需要采用一些特殊的淀积方法，如电子束加热法、溅射法等才能制备。

最简单电子束加热装置由电子枪组成，电子枪由一个热发射电极和加速电场组成。被加速的电子以很大的动能撞击到铌材表面，将动能交给铌材，使铌材表面升温熔化并蒸发。用电子枪蒸镀铌膜一般要 10^{-8} 毛以上的真空度，枪功率在3KW以上，能制出临界温度为8K左右的铌膜。

一定能量的离子轰击待淀积材料(即靶)，靶原子从靶材表面逸出，这种现象叫做溅射。如果原子的逸出是由于正离子的轰击，则叫做阴极溅射。阴极溅射又分为射频溅射和直流溅射两种。

为了制备高质量的铌膜，一般需要做到以下几点：(1)尽量减少介入杂质的总量；(2)缩短杂质和衬底的作用时间；(3)设法清除已达到衬底的杂质。

为了减少介入杂质的总量，应尽量采用高纯靶材、高纯氩气(溅射制膜)，并设法提高本底真空度。当系统达到极限真空度后，通常都要予淀积一定厚度的强吸气薄膜(如铌膜)，一方面是为了清洗靶材，另一方面也是为了用这些予淀积薄膜进一步吸附淀积时释放的气体。

为了缩短杂质和衬底的作用时间，应设法加大淀积速率。用电子束蒸镀铌膜时，可以在 1×10^{-7} 毛真空度下，用13KW的电子枪向铌靶注入大量的高能电子，形成铌的迅速蒸发，气体杂质很难进入蒸汽锥面，从而蒸镀出基本上与靶材相同的铌膜。用溅射法制膜时，调节靶距和控制气压，使溅射速率达到最大。射频溅射时，衬底和靶之间的距离通常为2.5～3cm，

真空度为 5×10^{-3}～1×10^{-2} 乇，溅射速率为 7～10Å/S。

衬底加热和负偏压溅射可以将到达衬底的杂质清除掉。衬底温度视其材料而定，通常加热到 600～700°C。

采用以上几个措施后，在本底真空度为 3×10^{-7} 乇的射频溅射镀膜机内，可以制备出室温电阻和剩余电阻比为 2.5、临界温度为 8K 左右、性能重复的铌膜。在超高真空溅射镀膜机内，本底真空度为 3×10^{-9} 乇时，可以制出近似于靶材的铌膜。

国内在制备铌膜方面已积累了丰富的经验，有兴趣的读者可参阅文献[8]。

二、微桥结的制备工艺

我们知道，只是在桥区尺寸与所用超导薄膜的相干长度不相上下或小于相干长度时，才会有正弦式电流——位相关系。除铝外，一般的超导膜只有几千Å甚至更短的相干长度，因此给制桥结工艺提出了很苛刻的条件。可以采用两种制桥方法，一种是直接制出又窄又短的桥，例如直接刻划或光刻；另一种是先制出长的或厚的桥区，尔后再采用一些辅助手段使桥尺寸变得合适，如脉冲处理、阳极氧化。

光刻的含义包括两个方面：一是光源曝光；二是刻蚀掉不被光刻胶保护的地方。经常采用的光源为：紫外光、电子束、X 射线。刻蚀方法有：化学腐蚀、离子刻蚀、溅射刻蚀、光刻胶剥离技术等。

实验上指出，即使桥的长度小于相干长度，也不一定显示约瑟夫逊效应，这是自热效应引起的。为了减小自热效应，人们制备了桥区薄、两边的岸区较厚的厚差桥或变厚桥。

下面我们介绍等厚桥和变厚桥的可行制备方法。

1．通过掩模直接蒸镀

当制备的线条尺寸较大时，可以通过掩模直接蒸镀金属。掩膜一般用极薄的铜箔(10～100μm厚)制得，也有用薄的不锈钢片、镍片或钼片制得。用光刻胶掩住想要保留的地方，然后放入稀硝酸或其他溶液中，将不需要的地方蚀去，制得的最细线条可达几十微米。这种方法在制桥工艺上很少使用。常用的是用一根极细的纤维丝粘在衬底上，挡住不想蒸镀的地方。此法多半用来制备厚差桥，桥区尺寸可达1～2μm。

图 6.3 示出用掩膜制作厚差桥的两种方法。第一种方法是先在衬底上淀积一层薄膜，用光

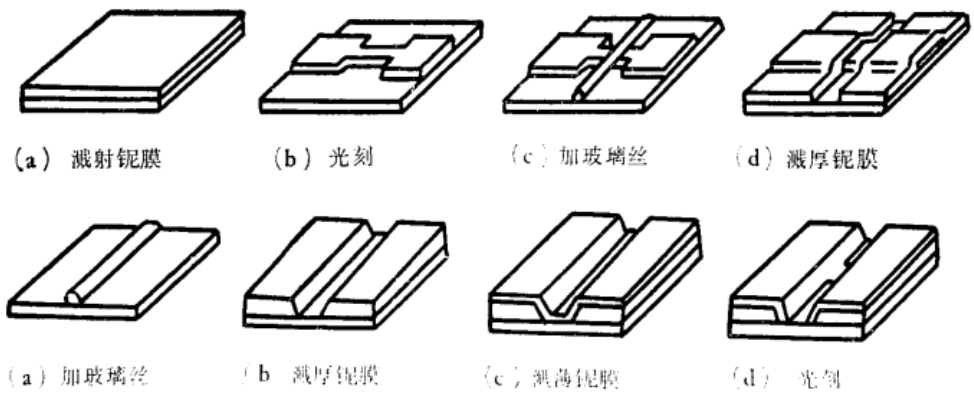


图 6.3 通过掩膜制作厚差桥的方法

刻方法制出长桥。桥上粘一细纤维丝，再淀积一厚膜。第二种方法是先把玻璃丝粘到衬底上，淀积一层厚膜，取下玻璃丝，再淀积一层薄膜，用光刻法制出小桥。曝光以后，通常采用离子刻蚀方法制出小桥[9]。

2．接触式曝光法

前几年，一般都用普通光刻法制备铌桥，即先在衬底上淀积一层薄膜。从真空室取出后，在其表面旋涂一层光刻胶。按胶的要求作适当的前烘，把予先制备好的掩膜（通常为淀积在玻璃衬底上的铬膜或乳胶版）盖在光刻胶上，用紫外光曝光，在显影液中显影，在金属膜上想保留金属的地方留有光刻胶。放到腐蚀液中除去不用的金属，然后溶去光刻胶，即制成样品。

常用的光刻胶有正性胶和负性胶两大类。正性胶被光照射后可以被显影液溶去。负性胶被光照射处可以留下来，不被光照的地方可以被显影液溶去。可以根据掩膜情况选择适当的光刻胶。不同的光刻胶有不同的前烘、曝光、显影、定影、坚膜条件。

上面介绍的用掩模复盖光刻胶的接触式曝光法会由于光衍射产生图形模糊。这种方法的极限近似为1微米。光波衍射的原因是由于掩膜与光刻胶间的接触不够理想，膜面凸凹不平，胶面有灰尘等。为解决此问题，文献[10]中指出了一种好方法：把掩膜做在薄且易弯曲的玻璃片上，然后把涂有光刻胶的膜面与掩膜的膜面压紧，放到一个简单的真空架上抽真空，空气压力会使掩膜与光刻胶呈光学接触。用汞弧灯曝光，配合胶膜剥离技术，可以制出0.4μm宽的线条。

3．光学投影式曝光法

通常，光刻制桥使用掩模版都是用电子束曝光制得。用照象缩小制得的线条常大于1微米。如果有大的掩模版，想制出更小的样品，可以通过光学显微镜缩小来完成。

在金属膜上涂上光刻胶。用接触式曝光法确定电极片，用投影式曝光法确定桥区。掩膜放在显微镜光栏上，缩小的象投影在光刻胶上。曝光显影后，可以用化学方法刻蚀也可以用溅射刻蚀制出需要的桥。

如果先涂复光刻胶，然后曝光、显影，再蒸镀金属，最后放到去除光刻胶的溶液中，把光刻胶连同不需要的金属一起除去的方法叫做光刻胶剥离法。

为了使去除的金属和留下的金属不连接，光刻胶最好有小的下切。为此，从衬底背面曝光，使光先通过衬底，然后照射到光刻胶底部。由于会聚光束的锥面，从而形成小的下切。

利用投影式曝光法可以制出0.2μm的线条[11]。

4．电子束曝光法

电子束曝光法的基本步骤与光学投影法相似，只是曝光光源改成电子束。

电子束曝光分为点、线、面曝光几种形式。点曝光是由计算机控制电子束，在涂有光刻胶的铬版上，按照设计图案进行逐点扫描。电子打到的地方的光刻胶分子键重新组合，即所谓曝光。曝过光的片子再经过显影、坚膜、腐蚀等工艺，即可得到所需要的桥。

利用这种方法可以得到0.1μm的线条[12]。

有人利用这种电子束轰击金属膜表面上在淀积时形成的油污，以此作为离子刻蚀用的掩膜，得到了100Å的线条[13,14]。

5．金属掩膜代替抗蚀剂掩膜

上面所介绍的光刻胶剥离法的缺点是衬底不能加高温，但衬底加热有时是必要的。为了克

服衬底不能加热的缺点，可以用金属掩膜代替抗蚀剂，用离子刻蚀代替光刻胶剥离技术[15]。

例如，在制备铌桥时，先在衬底上淀积出铌膜，然后涂上电子曝光胶，放入电子束系统中，将一放大的铜掩膜象用电镜缩小曝光在电子曝光胶上，显影后显出正象，放在真空室内镀一薄层铬，铬层厚度至少为铌层的一半。将胶溶去，在铌膜上面有一设计的铬桥形状，用平行的氩离子束刻蚀未被铬复盖的铌，同时也刻蚀了铬。刻蚀掉未被铬复盖的铌后，将剩余的铬用氢氧化钠溶液除去，得到铌桥。

6．经次微米掩膜蒸镀法

先在衬底上蒸镀一层厚的铬(或铝)，上面再加一层薄的银(或金、铜)，涂上电子抗蚀剂PMM，用电子束在PMM上曝光，显影，制出负图形。在离子刻蚀室刻去薄的银层，去掉抗蚀剂，用化学腐蚀方法去掉下面的铬，化学腐蚀会产生下切，这时刻出的掩膜是架空的，如图6.4。蒸镀超导膜时，只要恰当地倾斜样品，伸出来的银掩膜会部分地挡住入射的蒸汽原子，从而制出很小的桥。这种方法也克服了衬底不能加热的缺点。

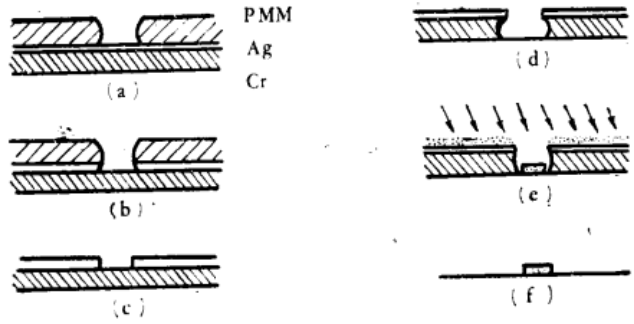


图6.4 经过微米掩膜蒸镀法

a) 曝光显影成负图形 b) 刻蚀Ag c) 去抗蚀剂

d) 腐蚀Cr形成下切 e) 倾斜蒸膜 f) 溶去Cr

7．作在带棱衬底上的变厚微桥

如图6.5，衬底上刻出700 Å深的台阶，溅射上NbN薄膜。用光刻法作出图形。恰当倾斜该样品，用离子束刻蚀。由于斜向刻蚀，沿台阶的面首先变薄，从而得到变厚桥。桥区厚100 Å，桥区两侧的岸区厚300 Å[16]。

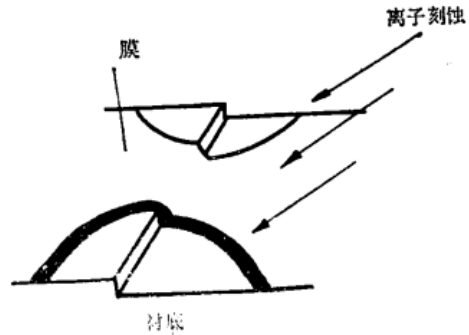


图6.5 作在带棱衬底的微桥

文献[17]指出了一种不需要精密光刻工艺就可以制出变厚桥的方法，如图6.6。衬底的半个表面上蒸镀一层铬膜，用离子束刻蚀掉另半个表面，使衬底上形成500 Å的台阶(图6.6*a*)；旋甩光刻胶，使半个表面曝光、显影。这半个表面与台阶表面正交(图6.6*b*)；斜向蒸铬，由于衬底上的台阶，这层铬膜有500 Å远的错位(图6.6*c*～*d*)；这层铬膜用作下一步刻蚀工艺的掩膜；最后形成的衬底上有一个小面*A*(图6.6*e*)，微桥将作在这个小面上；斜向蒸镀超导膜，小面*A*上的膜较薄，其他部分的膜较厚；按通常工艺作出变厚桥。

8．离子掺杂桥

一种作法是桥区掺杂，使桥区的临界温度降低[9]。先在衬底上淀积出铌膜，用光刻法制

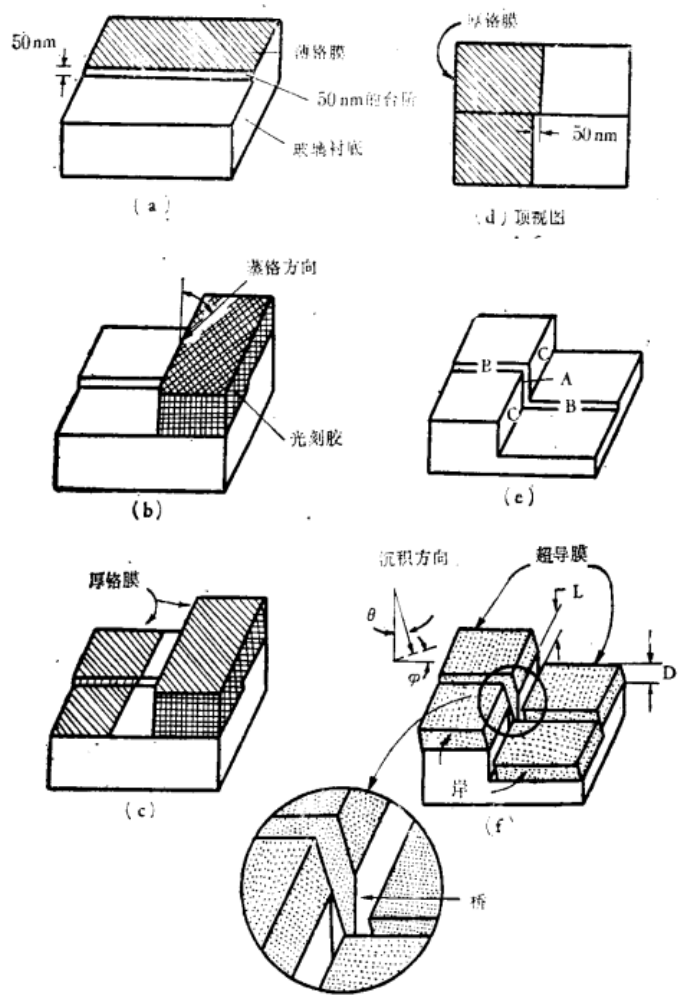


图 6.6　文献[17]报告的变厚微桥工艺

出桥区为 30 μm 宽、3 mm 长的样品，涂上光刻胶，将中心处曝光留下 0.5 μm 宽的线条，上面淀积一层厚几千 Å 的铜膜。将曝光处的胶溶去，同时除去了上面的铜，使得桥区有 0.5μm 宽的线条没有复铜，用离子注入机注入氩、氧、铁、锰或铒离子，将桥区弱化。

还有一种作法是整个膜全掺杂，只是掺杂的结果使桥区的临界温度低于两岸区的临界温度[18]，如有人把 Mo 溅射到兰宝石片上，做出厚度为 500～1000Å 的膜。用光刻法作出桥的图形。整个图形都掺 N^+或 S^+，使整个膜的临界温度从 0.9 K 升到 1.7 K。然后用光刻胶将桥区挡住，再注入 N^+或 S^+，使它的临界温度上升到 4K 左右。

Nb_3Sn 微桥结还可以通过注入 α 粒子，使桥区弱化。

9.　阳极氧化法

用光刻法制出厚的铌桥，将桥区的光刻胶去掉 0.5 μm 宽的一窄条，滴上硼酸，插入金电极。金电极接电源负极，铌膜接正极。当二电极上加上直流斜升电压后，铌膜开始氧化。其氧化深度决定于外加电压及通电时间。于是，经一定时间后，便得到变厚桥。

10. 脉冲处理[19,20]

将制好的铌桥放到液氦杜瓦中测量它的临界电流。如果临界电流过大，则可以向该微桥加一系列脉冲。该脉冲幅度与时间呈线性增加关系，相邻脉冲间的间隔为几百毫秒。在此间隙内测量微桥的电阻，该电阻随脉冲加入时间而变化，当电阻达到适当值时，电子线路使脉冲中断，再测量它的临界电流。利用这种方法容易将临界电流原为几毫安的微桥变成几微安的合用微桥。

§6.3 隧道结的制备

隧道结的制备包括材料的选择、薄膜的制作、势垒的制作、图形的形成等工艺。

由于 SQUID 中的隧道结的结电容要小、临界电流为微安量级、结电阻为欧姆量级，从而隧道结的 $I-V$ 特性是无回滞的，这样以来，满足 SQUID 要求的隧道结的结面积不能大于 $1\ \mu m^2$。

用通常的光刻工艺很难制作 1 μm以下的线条，从而无法制作结面积小于 $1\ \mu m^2$ 的隧道结，为此，必须采用新的制作工艺。下面介绍其中的几种。

一、铅合金隧道结的制备

文献[21]中指出了一种阴影蒸镀方法：玻璃衬底上刻一细槽，槽上横放一根石英细丝。该石英丝用作阴影蒸镀的掩膜。首先斜向蒸镀铅或铅合金下电极，一般铅原子蒸气的入射方向和衬底法线间的夹角为 45°。再氧化生成氧化铅势垒层。随后将衬底旋转 90°，斜向蒸镀上电极。于是，在石英丝下方，上下电极重叠区形成隧道结，结面积为 $10^{-8}\ cm^2$，临界电流密度为 $2\times10^5\ A/cm^2$，结电阻为 0.3 Ω。

文献[22]中指出了另一种斜蒸方法，如图 6.7。衬底上作出架空的光刻胶细条。沿方向 1 斜蒸下电极，氧化以生成势垒层，再沿方向 2 斜蒸上电极，于是在搭接处形成隧道结，结面积为 $10^{-9}\ cm^2$。该结面积的不确定性由光刻工艺的线条宽度控制精度决定，例如，搭接区的长度为 0.5 μm，架空光刻胶细条宽度的不确定性为 0.1μm，则结面积的变化量为 20%，这是比较大的变化量。

为减小结面积变化量，人们发展了边棱定位隧道结[23]，如图 6.8，首先在衬底上作出

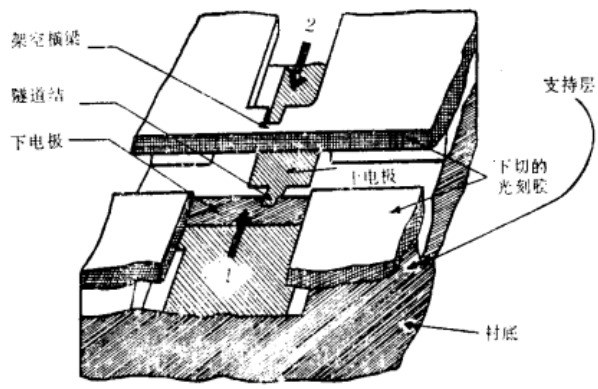


图 6.7 文献[22]报告的隧道结工艺

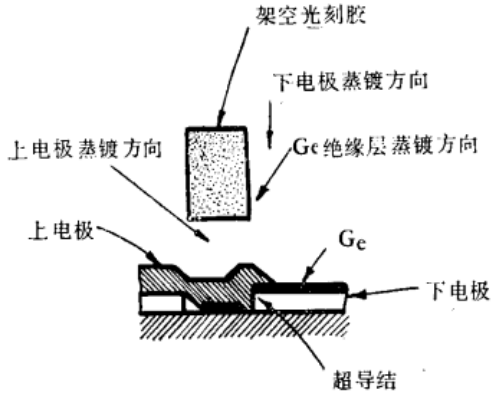


图 6.8 边棱定位隧道结制备原理

下电极，再沿图示方向蒸镀锗层，因低温锗是绝缘体，锗层几乎复盖着下电极的垂直边，再蒸镀上电极，于是在该垂直边上形成隧道结，而该结的一个尺寸由下电极厚度决定。所制作的结面积小于 10^{-9} cm²，临界电流密度 10^{5} A/cm²，结电阻为 10 Ω，但有一定的回滞。

结面积为 10^{-10} cm² 的隧道结，可用两种电子束抗蚀剂及斜蒸方法得到[24]。上层光刻胶是中速、高分辨率的，下层光刻胶是高速、中分辨率的。这种光刻胶经曝光、显影，下层的图形比上层的图形溶解得快，会形成带下切的胶膜，对于合适的图形，则上层光刻胶的细条会架空，与图 6.7 相同。于是，再依次斜蒸铅铟合金下电极、氧化势垒层、铅上电极，从而制出隧道结，该结的临界电流密度为 10^{5} A/cm²，结电阻 100 Ω。

二、铌隧道结的制备

上述的铅合金隧道结的优点是：(1) 可用Mo、Ta 等难熔金属舟通过电阻加热蒸发，与聚合物光刻胶剥离工艺协调；(2) 氧化势垒层的介电常数小，结电容小。缺点是：力学性质较差，经不起从室温到 4.2K 的冷热循环。当冷热循环一次后，薄膜中产生一个残余应力，使晶粒边界移动，在薄膜表面产生小丘或晶须，刺穿氧化势垒层，引起短路，使结变坏。

铌材的力学性质较好，可以用来制作经得起冷热循环、性能稳定的结。但是它的熔点高，需要用电子束加热，而电子束加热会使聚合物光刻胶变质，必须用刻蚀或用耐热胶剥离工艺制备图形。另外，氧化铌的介电常数较大，必须制备结面积更小的结。

文献[25]中指出了一种制备工艺，如图 6.9。在半导体或缘绝体衬底上蒸镀 0.5 μm厚的铬层，旋甩同样厚度的电子光刻胶 PPM，在 120°C 空气中烘烤半小时，放入电子束投影系统。一个放在显微镜光栏处的金属掩膜的图象，缩小 20 倍后，投射到光刻胶上。显影后，衬底上留下同样形状的图形。光刻胶上再溅射 1000Å 厚的铌膜。为使铌膜和铬膜间的粘着性好，溅射铌膜前作直流辉光放电处理。除去光刻胶，铌图形留在衬底上(图 6.9b)。将衬底放

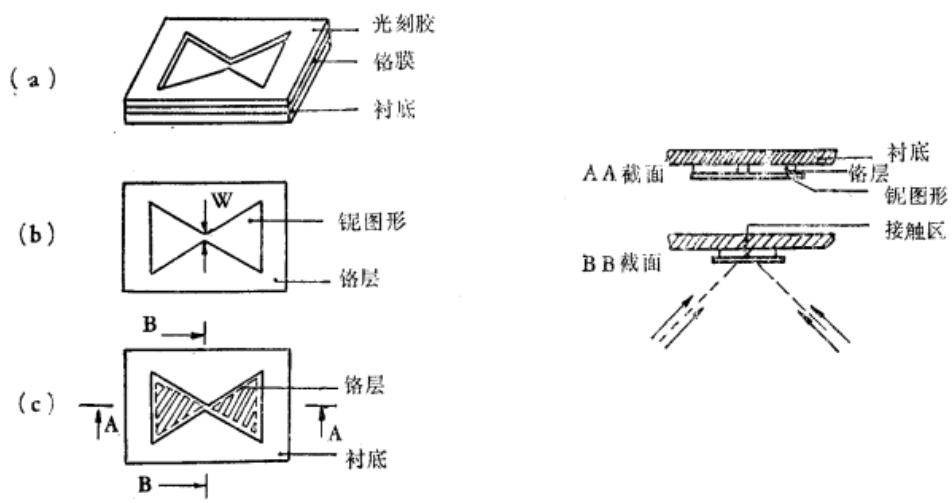


图 6.9　文献[25]报告的铌隧道结工艺

入铬腐蚀液，下层的铬被刻蚀。选择合适的刻蚀时间，使得最窄部分的铬全部除去，得到图 6.9*c* 的图形，图中画斜线部分表示未刻蚀的铬膜，亦即，铌膜被二块分开的铬膜架起来，铌膜的窄区起着上述的石英丝掩膜作用。用两次斜蒸及氧化生成势垒便可以制出上下电极均

为铌的隧道结。

文献[26]中指出了另一种制备工艺。首先制备接触式掩膜：弹性玻璃衬底(40×40×0.2 mm)上蒸镀 80 nm 的铬层、10 nm的硅，再旋甩 AZ1350 光刻胶(厚 0.5 μm)。曝光显影后，用等离子刻蚀或化学腐蚀方法分别除去硅膜和铬膜，该接触式掩膜的精度为 0.5 μm。隧道结的制备工艺和文献[25]中的方法相似，如图6.10。n型或p型单晶硅基片上蒸镀 0.5 μm 厚的铬，甩 0.5 μm 的光刻胶，把接触式掩膜压在胶面上，抽去其间空气，由于外界空气压力，使它们间呈光学接触。经曝光、显影、作出图形后，溅射 0.1 μm 厚的铌，剥离掉光刻胶及上面的铌，蚀掉一些铬，得到阴影蒸发的掩膜。借助图 6.11 的掩膜制作 DC-SQUID。首先斜蒸一层厚 200nm 的铌膜作为下电极，再蒸 20 nm 的硅，氧化后，再斜蒸 300 nm厚的铌膜作上电极，及 7 nm 的金膜作引线，用铬腐蚀液将阴影蒸发掩膜除去。该隧道结没有外加的分流电阻，衬底电阻用作消除回滞的分流电阻。

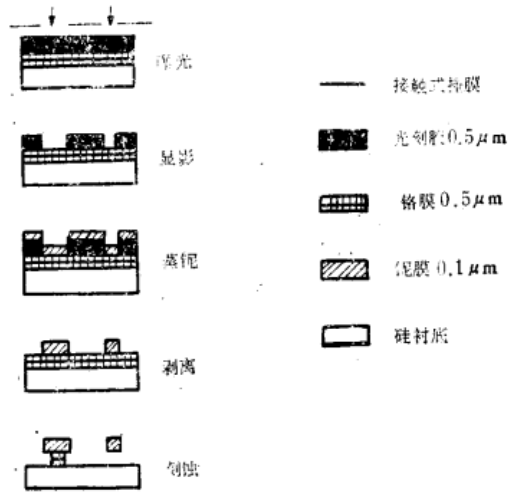


图 6.10　铌隧道结制备工艺

三、A-15 材料隧道结的制备

用高临界温度的 A-15 材料 Nb_3Sn、Nb_3Ge、V_3Si 等薄膜作下电极，也能制成比较稳定的隧道结。

用双电子枪可以将 Nb_3Sn 蒸镀到 760°C 的兰宝石衬底上，Nb_3Sn 薄膜厚度为 5000 Å。该薄膜在含少量醋酸蒸汽的空气中热氧化 20 小时后，再蒸镀一层铅膜作上电极，从而制成 Nb_3Sn—I—Pb 隧道结。也可以在 Nb_3Sn 薄膜上蒸镀一层 10～30 Å 厚的硅，再氧化，蒸铅，从而制成 Nb_3Sn—SiO—Pb 隧道结。

Nb_3Ge 薄膜可用一定比例的 Nb—Ge 靶溅射到 550°C 的兰宝石衬底上制成，膜厚约 2000 Å。在 Nb_3Ge 表面蒸发一层厚 100 Å 的铅膜，再用溅射刻蚀使铅膜减薄到 10～50 Å。

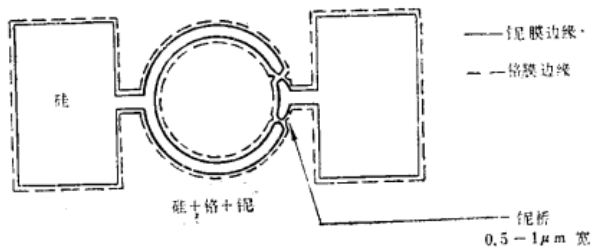


图 6.11　制作 DC-SQUID 的掩膜

然后在空气中热氧化 10 分钟左右形成氧化层，再蒸镀一层铅膜作为上电极，从而制成 Nb_3Ge—Al_2O_3—Pb 隧道结。

V_3Si 电极可用 V_3Si 单晶上切下来的薄片制成。在它表面蒸上一层 Si 或 Al，再氧

化，蒸镀，制成 V_3Si—SiO_2—Pb 或 V_3Si—Al_2O_3—Pb 隧道结。

四、Tc 大于 77K 的超导薄膜的制备

自 1986 年 4 月柏诺兹和谬勒发现钡钇铜氧化物在 35 K 可能显现超导电性[27]，特别是 1987 年 2 月发现 Tc = 90～95 K 的钡钇铜氧化物、钡—稀土—铜氧化物以来，全世界范围内成千上万的科技工作者正投入一场规模宏大的旨在获得高 Tc 超导体的竞赛，进展极快，真可谓日新月异，例如，1987 年 5 月 26 日美国的一个研究组发现零电阻温度 225 K 的超导体[28]，另一个研究组发现 260 K 的超导体[29]，6 月上旬，苏联发现 35°C 的超导体[30]，这样的记录，还会一次再一次地被刷新。

这些新材料薄膜的制备工作也进展得很快。中科院物理研究所采用电子束蒸发技术[30]，即用电子束连续轰击钡钇铜氧化物，使其汽化，不断沉积在衬底上而形成薄膜，薄膜面积 $3\times10\ mm^2$，起始转变温度 96 K，零电阻温度 87 K；北京大学用电子束蒸发技术分别将钇、钡氧化物和铜分层蒸发在衬底上，再进行扩散处理，制出零电阻温度 84 K 的薄膜[31]；美国 IBM 公司在钛酸锶衬底上制出 0.5 μm 厚的薄膜 77 K 时的电流密度 $10^5\ A/cm^2$[32]，该公司已初步制出 DC-SQUID。日本把钡、钇、铜溶于硝酸盐中，再把该溶液喷到电路板上，进行烧结，而制成薄膜[33]。我国也初步制出微桥结 SQUID。

参 考 文 献

[1] R. A. Buhrman et al., *J. Appl. Phys.*, 45, 4045 (1974)

[2] R. P. Giflard et al., *J. Low Temp Phys.*, 6, 533(1972)

[3] J. E. Zimmerman et al., *J. Appl. Phys.*, 41, 1572(1970)

[4] 复旦大学，点接触 RF-SQUID 的制作，全国第一届超导隧道效应学术会议资料(1978)

[5] 长春地质学院，双触点超导磁力仪工作小结，全国第一届超导隧道效应学术会议资料(1978)

[6] H. Tolner et al., *IEEE Trans.*, Mag-11, 866(1975)

[7] D. A. Weitz et al., *Appl. Phys. Lett.*, 31, 227(1977)

[8] 吴修文等，低温物理，6，87(1984)

[9] B. G. Boone et al., *IEEE Trans.*, Mag-11, 735(1975)

[10] H. I. Smith et al., *J. Electrochem. Soc.*, 44, 1621(1973)

[11] M. D. Feuer et al., 《*future trends in superconductive electronics*》, edited by B. S. Decver et, AIP Conf. No. 44, American Institute of Physics, New York, 1987, p.317

[12] L. B. Holdeman et al., *IEEE Trans.*, Mag-11, 782(1975)

[13] A. N. Broers et al., 同[11], p.289

[14] G. E. Lukeus et al., 同[11], p.198

[15] G. M. Daalmans et al., 同[11], p.312

[16] J. H. Claassen et al., 《*SQUID'80, superconducting quantum interference devices and their applications*》, Pro. I. C. SQUID 1980, W. de Gruyter, Berlin, 1980 p.333

[17] M. D. Feuer et al., *Appl. Phys. Lett.*, 36, 226(1980)

[18] E. P. Harris et al., *IEEE Trans.*, Mag-13, 724(1977)

[19] D. Duret, *Rev. Sci. Instr.*, 46, 474(1975)

[20] 曾佩韦等，低温物理，5，132(1983)
[21] J. Niemeyer et al., Proc. I. C. SQUID 1976, W. de Gruyter, Berlin,1976, p.179
[22] G. J. Dolan, *Appl., Phys. Lett.*, 31, 337(1977)
[23] R. E. Howard et al., *Appl. Phys.Lett.*, 35, 879(1979)
[24] R. E. Howard et al., *Appl. Phys. Lett.*, 36, 141(1980)
[25] G. M. Daalmans, 《*SQUID'80, superconducting quantum interference devices and their applications*》, Pro. I. C. SQUID 1980, W. de Gruyter, Berlin, 1980, p.399
[26] V. J. de Waal et al., 同[25], p.389
[27] J. G. Bednorz et al., *Z. Phys. B—Condensed Matter*, 64, 189(1986)
[28] 1987 年 5 月 26 日《人民日报》
[29] 1987 年 6 月 3 日《人民日报》
[30] 1987 年 5 月 20 日《人民日报》
[31] 1987 年 5 月 31 日《人民日报》
[32] 1987 年 5 月 13 日《人民日报》
[33] 1987 年 6 月 12 日《人民日报》